DIE KRÜMMUNG

DER

ZWEIDIMENSIONALEN GEBILDE

IM EBENEN RAUM

VON VIER DIMENSIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

KARL KOMMERELL

AUS TÜBINGEN

TÜBINGEN, 1897

DRUCK VON H. LAUPP JR.

1566.

DIE KRÜMMUNG

DER

ZWEIDIMENSIONALEN GEBILDE

IM EBENEN RAUM

VON VIER DIMENSIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

KARL KOMMERELL

AUS TÜBINGEN

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

TÜBINGEN, 1897

DRUCK VON H. LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen den 6. Februar 1897.

Meiner teuren Mutter

in treuer Liebe und Anhänglichkeit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552309_0113

VORWORT.

Von den Gebilden, die in einem Raum von n Dimensionen auftreten, sind hauptsächlich die 1-dimensionalen und die $(n-1)$-dimensionalen untersucht worden. Man vergleiche hiezu das treffliche Werk von Killing „Nicht-Euklidische Raumformen in analytischer Behandlung“ sowie den dort aufgeführten ausführlichen Litteraturnachweis. Viel weniger ist über $(n-2)$-dimensionale Gebilde bekannt geworden. Der Spezialfall $(n-2=2)$, den die vorliegende Arbeit behandelt, ist dadurch ausgezeichnet, dass er auch die gewöhnlichen Flächen umfasst, während das simultane Bestehen zweier Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Flächenpunkts zu einer weitgehenden Analogie mit Raumkurven Anlass giebt.

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Brill, für die reiche vielseitige Anregung und Unterstützung, die ich bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit von ihm erfahren durfte, meinen besten Dank auszusprechen.

EINLEITUNG.

Die vorliegende Arbeit stellt sich zur Aufgabe, die wichtigsten Sätze für Flächen im dreidimensionalen Raum auf Flächen des ebenen Raums von vier Dimensionen zu übertragen. Es zeigt sich, dass gewisse Eigenschaften neu auftreten, andere wegfallen. So besitzt eine Fläche im vierdimensionalen Raum in einem ihrer Punkte vier Hauptkrümmungsradien; dementsprechend lässt sich auf ihr ein vierfach-unendliches System von Krümmungslinien definieren. Beim Uebergang zu Flächen des dreidimensionalen Raums werden zwei Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross, und dem vierfach-unendlichen System der Krümmungslinien entspricht auf gewöhnlichen Flächen das System der Krümmungslinien und Asymptotenkurven. Die von einem Flächenpunkt ausgehenden Linienelemente, die in der Tangentenebene dieses Punkts gelegen sind, lassen sich involutorisch paaren. Die Doppelelemente dieser Involution zeigen grosse Analogie mit den Assymptotenrichtungen gewöhnlicher Flächen. Nach der Realität dieser Doppelelemente erfolgt die Einteilung der Flächenpunkte in hyperbolische, parabolische und elliptische. Die parabolische Linie verbindet die parabolischen Flächenpunkte, in denen ein Hauptkrümmungsradius unendlich gross wird, und trennt die Gebiete elliptischer und hyperbolischer Flächenpunkte. Insbesondere liegt in der Normalebene jedes Flächenpunkts ein Kegelschnitt, der im hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen Punkt bzgl. eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Dieser Kegelschnitt hat für die Charakterisierung der Krümmung der Fläche eine ähnliche Bedeutung wie die Indikatrix für den Flächenpunkt im dreidimensionalen Raum, ohne jedoch eine Verallgemeinerung dieser Kurve zu sein. So erhält man z. B. die Hauptkrümmungsmittelpunkte als die Fusspunkte der Lote, die man von dem Flächenpunkt, der ein nicht näher charakterisierter Punkt im Innern des Kegelschnitts ist, auf den letzteren fällen kann.

Die Sätze, die Herr Killing in seinem Buche „Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung“ § 13 für n-dimensionale Gebilde im Raum von n Dimensionen angiebt, mögen auf unsern Fall angewandt mit aufgeführt werden.

Im Folgenden beziehen wir die Punkte des ebenen vierdimensionalen Raums auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Zu diesem Zweck lege man durch einen festen Punkt O desselben vier auf einander senkrecht stehende Gerade X, Y, Z, T (Coordinatenaxen). Durch je drei derselben ist ein ebener dreidimensionaler Raum bestimmt. Man fälle nun von einem Punkt P auf diese vier so konstruierten Räume die Lote und bezeichne ihre Längen bzgl. mit x, y, z, t (Coordinaten). Wendet man die Formeln bei Killing „Die Nicht-Euklidischen Raumformen“ Art. 36—38 auf den ebenen vierdimensionalen Raum an und setzt demnach $n = 4$, $k = \infty$, so erhält man folgende Formeln:

Die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 ist durch die Gleichung

$$\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2$$

bestimmt.

Eine Gerade durch den Ursprung O des Coordinatensystems habe zu Neigungswinkeln gegen die Coordinatenaxen α, β, γ, δ, dann besteht die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1.$$

Der Winkel v zweier Geraden durch einen Punkt, die gegen die Axen die Neigungswinkel α_1, β_1, γ_1, δ_1 und α_2, β_2, γ_2, δ_2 haben, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\cos v = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2.$$

Die Bedingung dafür, dass jene beiden Geraden auf einander senkrecht stehen, lautet

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 = 0.$$

Die Gleichung eines ebenen dreidimensionalen Raums ist

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + t\cos\delta - d = 0;$$

dabei bedeuten α, β, γ, δ die Neigungswinkel der Geraden, die auf jenem Raum senkrecht steht und durch den Ursprung O geht, d der Abstand des Ursprungs von jenem Raum. Jede in den Coordinaten x, y, z, t eines Punkts lineare Gleichung drückt aus, dass dieser in einem ebenen dreidimensionalen Raum gelegen ist, da jede so beschaffene Gleichung sich auf die letztgenannte Form bringen lässt. Zwei dreidimensionale Räume stehen auf einander senkrecht,

wenn die Lote aus 0 auf dieselben auf einander senkrecht stehen; sie sind parallel, wenn jene beiden Lote zusammenfallen.

Die Gleichungen einer „Ebene“ erhält man in dem gleichzeitigen Bestehen zweier in den Coordinaten linearer Gleichungen.

Lässt man gleichzeitig drei lineare Gleichungen bestehen, so wird durch dieses System eine „Gerade“ dargestellt. Die Gleichungen einer Geraden können auch noch in folgender Form gegeben werden:

$X - x = \rho \cos\alpha$; $Y - y = \rho \cos\beta$; $Z - z = \rho \cos\gamma$; $T - t = \rho \cos\delta$.

(x, y, z, t) bedeutet dabei einen festen Punkt der Geraden, ρ die Entfernung des Veränderlichen (X, Y, Z, T), $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Neigungswinkel derselben gegen die Axen.

Bezeichnung: Gerade sollen durch R_1, R_1', R_1'' ..., Ebenen durch R_2, R_2', R_2'' ... bezeichnet werden. Unter Räumen verstehen wir, wenn nichts weiter beigefügt ist, stets ebene Räume von drei Dimensionen, dieselben bezeichnen wir durch R_3, R_3', R_3''...

§ 1. Krümmungsradius und Schmiegungsebene einer Raumkurve.

Die Coordinaten einer Raumkurve im ebenen Raum von vier Dimensionen (R_4) fassen wir auf als Funktionen eines veränderlichen Parameters u in der Form

$$x = x(u);\ y = y(u);\ z = z(u);\ t = t(u).$$

Zur Abkürzung wird gesetzt

$$\frac{dx}{du} = x';\ \frac{d^2x}{du^2} = x'';\ \text{etc.}$$

Wir gehen vom Punkt (1) mit den Coordinaten x, y, z, t bis zum benachbarten (2), von diesem wieder zum benachbarten (3) und erhalten so zwei Linienelemente, welche den Winkel $d\tau$ einschliessen. Ist ds das Bogenelement, so ist der Krümmungsradius ρ bestimmt durch

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Anmerkung: Durch vier konsekutive Punkte ist ein dreidimensionaler Raum (Schmiegungsraum) bestimmt; da in diesem die beiden ersten Elemente, die die Schmiegungsebene bestimmen, liegen, so hat ρ dieselbe geometrische Bedeutung wie bei gewöhnlichen Raumkurven, und der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene.

(1) hat zu Coordinaten x, y, z, t.

(2) „ „ „ $x + x'du,\ y + y'du,\ \ldots$

(3) „ „ „ $x + 2x'du + x''du^2,\ y + 2y'du + y''du^2,\ \ldots$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ seien die Cosinusse der Neigungswinkel gegen die Axen der beiden Elemente 12 und 23, dann ist;

$$\alpha = \frac{x'}{\sqrt{\Sigma x'^2}};\ \beta = \frac{y'}{\sqrt{\Sigma x'^2}};\ \ldots$$

$$\alpha_1 = \frac{x' + x''du}{\sqrt{\Sigma(x' + x''du)^2}};\quad \beta_1 = \frac{y' + y''du}{\sqrt{\Sigma(x' + x''du)^2}};\ \ldots$$

wobei sich die Summen von x bis t erstrecken.

$$cos\, d\tau = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \delta\delta_1,$$

$$sin^2 d\tau = \begin{vmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \delta\delta_1 \\ \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \delta\delta_1 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{Vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \alpha_1 & \delta_1 \end{vmatrix}^2 + \ldots$$

Da $d\tau$ sehr klein ist, so ist

$$d\tau^2 = \Sigma(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2,$$

wo sich die Summe über alle Combinationen der Buchstaben α, β, γ, δ erstreckt.

$$d\tau = du\sqrt{\frac{\Sigma(x'y'' - y'x'')^2}{\Sigma x'^2\, \Sigma(x' + x''du)^2}}.$$

Die obere Summe erstreckt sich über alle Combinationen der Buchstaben x, y, z, t, die unteren Summen von x bis t.

Da $ds^2 = \Sigma x'^2 du^2$, so ist

$$\rho = \frac{\Sigma x'^2 \sqrt{\Sigma(x' + x''du)^2}}{\sqrt{\Sigma(x'y'' - y'x'')^2}},$$

oder, mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen im Zähler,

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Sigma(x'y'' - y'x'')^2}},$$

wo sich die Summe über alle Combinationen der Buchstaben x, y, z, t erstreckt.

Die Schmiegungsebene im Punkt (1) muss auch die Punkte (2) und (3) enthalten. Die Gleichung

$$A(X - x) + B(Y - y) + b(Z - z) + D(T - t) = 0$$

stellt einen R_3 durch den Punkt (1) dar. Damit dieser R_3 die Punkte (2) und (3) enthalte, muss sein

$$Ax' + By' + bz' + Dt' = 0$$
$$Ax'' + By'' + bz'' + Dt'' = 0$$

Bedeuten α, β Parameter, so können die drei letzten Gleichungen ersetzt werden durch

$$X - x = \alpha x' + \beta x''$$
$$Y - y = \alpha y' + \beta y''$$
$$Z - z = \alpha z' + \beta z''$$
$$T - t = \alpha t' + \beta t''$$

Denn multipliziert man die einzelnen Gleichungen bzgl. mit A, B, C, D und addiert, so zerfällt die resultierende Gleichung wegen der Willkürlichkeit von α und β wieder in die drei obigen. Dieses letzte System gibt nun aber offenbar die Darstellung der Schmiegungsebene durch Parameter. Eliminiert man diese, so sieht man, dass die Gleichungen der Schmiegungsebene auch erhalten werden, wenn man irgend zwei von einander unabhängige Determinanten des unvollständigen Systems

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & T-t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{vmatrix}$$

mit Null vergleicht.

§ 2. Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung.

Ein zweidimensionales Gebilde (Fläche) wird im R_4 durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Flächenpunkts dargestellt

$$F_1(xyzt) = 0; \quad F_2(xyzt) = 0,$$

oder, indem man sich die Coordinaten als Funktionen zweier variabler Parameter gegeben denkt in der Form

$$x = x(uv); \quad y = y(uv); \quad z = z(uv); \quad t = t(uv).$$

Unter der Projektion der Fläche auf einen Coordinatenraum $t = 0$ verstehen wir die Fläche, welche die Fusspunkte der Lote bilden, die man von den Punkten der im R_4 gelegenen Fläche auf jenen Coordinatenraum fällen kann. Die Gleichung jener Projektion erhält man durch Elimination von t aus $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$. Die resultierende Gleichung $\varphi(xyz) = 0$, zusammen mit $t = 0$, stellt eine gewöhnliche Fläche im R_3 $t = 0$ dar und ist die Projektion der Fläche im R_4. Die Gleichung $\varphi(xyz) = 0$ für sich allein repräsentiert ein dreidimensionales Gebilde und zwar den Cylinder, der erhalten wird, wenn man in allen Punkten der Projektion Lote errichtet, die auf dem R_3 $t = 0$ senkrecht stehen. Dieser Cylinder geht daher sicher durch die Fläche im R_4 hindurch. Eliminiert man andererseits aus $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ z, so erhält man eine Glei-

chung $\psi(xyt) = 0$. Diese Gleichung stellt ebenso den Cylinder dar, der die Fläche in den Coordinatenraum $z = 0$ projiciert. Man kann nun die Fläche, unter Hinzunahme gewisser Ergänzungsflächen, auch durch den Schnitt zweier ihrer projicierenden Cylinder darstellen

$$\varphi(xyz) = 0\,;\ \psi(xyt) = 0,$$

oder, indem man φ nach z, ψ nach t auflöst, in der Form

$$z = f_1(xy)\,;\ t = f_2(xy),$$

oder, wenn u, v variable Parameter bedeuten

$$x = u\,;\ y = v\,;\ z = f_1(uv)\,;\ t = f_2(uv).$$

Ist die Gleichung der Fläche in Parameterform

$$x = x(uv)\,;\ y = y(uv)\,;\ z = z(uv)\,;\ t = t(uv)$$

gegeben, so führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1,\ \frac{\partial x}{\partial v} = x_2,\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{11},\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_{12},\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = x_{22},\ \text{etc.}$$

Der Ausdruck für das Linienelement ist:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

wo

$$E = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} + t_1^{\,2} = \Sigma x_1^{\,2}$$
$$F = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2 = \Sigma x_1 x_2$$
$$G = x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2} + t_2^{\,2} = \Sigma x_2^{\,2}$$

wenn zur Abkürzung von Summen, die in x, y, z, t symmetrisch sind, nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben wird. Die drei Grössen E, F, G, welche nur die ersten Ableitungen von x, y, z, t enthalten, heissen Fundamentalgrössen erster Ordnung.

Zu diesen Grössen treten im Folgenden noch zwölf weitere Funktionen d_μ, d_μ', d_μ'' $(\mu = x, y, z, t)$, welche die zweiten Ableitungen von x, y, z, t enthalten, und die wir Fundamentalgrössen zweiter Ordnung nennen. d_μ $(\mu = x, y, z, t)$ sei gleich der Unterdeterminante von λ_μ in folgender Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & \lambda_t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \end{vmatrix}$$

Aus d_μ erhält man der Reihe nach d_μ' und d_μ'', wenn man in d_μ in der letzten Horizontalreihe die Indices (11) bzgl. durch (12) und (22) ersetzt. So ist z. B.

$$d_x' = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_{12} & z_{12} & t_{12} \end{vmatrix}.$$

Endlich treten im Folgenden noch drei Grössen e, f, g auf, welche sowohl die ersten als auch die zweiten Ableitungen von x, y, z, t im zweiten Grad enthalten und durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \end{vmatrix} = e; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = f; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = g.$$

§ 3. Tangentialebene, Normalebene.

Die Coordinaten x, y, z, t eines Punkts der Fläche seien als Funktionen zweier variabler Parameter u, v in der im vorigen Paragraphen aufgestellten Form gegeben.

Die Bedingung dafür, dass der R_3

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) + D(T-t) = 0 \qquad (1)$$

ausser dem Flächenpunkt x, y, z, t noch die Punkte mit den Coordinaten $x + x_1 du$, $y + y_1 du$, etc. und $x + x_2 dv$, $y + y_2 dv$, etc. enthalte, lautet

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0 \qquad (2)$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 = 0. \qquad (3)$$

Diese drei Gleichungen stellen eine einfach unendliche Schar von R_3 dar, welche alle durch die Ebene

$$\begin{aligned} X - x &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ Y - y &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ Z - z &= \alpha z_1 + \beta z_2 \\ T - t &= \alpha t_1 + \beta t_2 \end{aligned}$$

hindurchgehen; dabei sind α, β variable Parameter. Diese Ebene nennen wir Tangentialebene und jene R_3, welche durch diese hindurchgehen, Tangentialräume. Die Gleichungen der Tangentialebene erhält man auch, indem man irgend zwei von einander unabhängige Determinanten des unvollständigen Systems

$$\begin{Vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & T-t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

mit Null vergleicht.

Die Ebene senkrecht zur Tangentialebene heisst Normalebene: diese kann auch als Enveloppe der Lote betrachtet werden, die im Flächenpunkt auf den verschiedenen Tangentialräumen errichtet werden können.

$\rho(X-x) = A;\ \rho(Y-y) = B;\ \rho(Z-z) = C;\ \rho(T-t) = D$
sind die Gleichungen der Geraden, die im Punkt (x, y, z, t) auf dem R_3

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) + D(T-t) = 0$$

senkrecht steht. Dieser Raum ist ein Tangentialraum, wenn A, B, C, D den Gleichungen (2) und (3) genügen. Die Gleichungen

$$M \equiv (X-x)x_1 + (Y-y)y_1 + (Z-z)z_1 + (T-t)t_1 = 0$$
$$N \equiv (X-x)x_2 + (Y-y)y_2 + (Z-z)z_2 + (T-t)t_2 = 0$$

stellen demnach die Normalebene dar. Die erste Gleichung sagt aus, dass die Gerade, welche den Flächenpunkt (x, y, z, t) mit dem Punkt (X, Y, Z, T) der Normalebene verbindet, senkrecht steht auf dem vom Flächenpunkt ausgehenden Linienelement der Fläche, dessen Richtungscosinusse proportional mit x_1, y_1, z_1, t_1 sind. Die zweite Gleichung drückt aus, dass jene Gerade noch auf einem zweiten Element der Fläche senkrecht steht. Die Normalebene stellt demnach die Gesamtheit von Strahlen durch den Flächenpunkt dar, die auf zwei Elementen und demnach auf allen Elementen der Fläche senkrecht stehen (s. Killing, Nicht-Euklidische Raumformen, Art. 35, h).

Durch die Normalebene geht eine einfach unendliche Schar von R_3, die wir Normalräume nennen. Die Gleichung dieser Schar lautet

$$M + \lambda N = 0,$$

wo λ willkürlich ist.

Anmerkung: Setzt man in den obigen Gleichungen eine Variable gleich Null, so erhält man bekannte Formeln für die Tangentialebene und Normale einer gewöhnlichen Fläche.

Wir werden im Folgenden öfters die Lage des Coordinatensystems, auf das wir die Fläche beziehen, so wählen, dass der Ursprung ein Flächenpunkt ist und dass $z = 0$, $t = 0$ die Gleichungen der Tangentialebene, also $x = 0$, $y = 0$ die der Normalebene im Nullpunkt darstellen; dies kann durch Verschieben und Drehen des Coordinatensystems stets bewerkstelligt werden. Wir suchen nun eine einfachere Fläche, mit der in der nächsten Umgebung (bis auf Glieder zweiter Ordnung) des Ursprungs unsere Fläche vertauscht werden kann.

Die Flächengleichung denken wir uns in der Form

$$2z = f(xy);\ 2t = \varphi(xy)$$

gegeben oder, indem man f und φ nach Potenzen von x und y entwickelt

$$2z = mx + ny + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$
$$2t = \mu x + \nu y + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots$$

Die Tangentialebene im Nullpunkt lautet nach (4), indem x und y als Parameter betrachtet werden,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ 1 & 0 & \frac{m}{2} & \frac{\mu}{2} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} & \frac{\nu}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Soll sich dabei, wie vorausgesetzt wurde, $Z = 0$, $T = 0$ ergeben, so ist notwendig und hinreichend, dass

$$m = \mu = n = \nu = 0.$$

Oder: die Fläche, bezogen auf zwei auf einander senkrechte Tangentialräume als Coordinatenräume, hat zu Gleichungen

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots$$

Beschränkt man sich auf die nächste Umgebung des Nullpunkts, wie dies bei der Untersuchung der Krümmung der Fläche im Nullpunkt geschieht, sieht man also x und y als sehr kleine Grössen an, so kann man die Glieder der dritten, vierten etc. Ordnung gegen die der zweiten vernachlässigen; man kann also in der Umgebung des Nullpunkts folgende Gleichungen einer Fläche zweiter Ordnung substituieren:

$$\begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Anmerkung: Sind die Coeffizienten α, β, γ gleich Null, so ist unsere Fläche eine gewöhnliche Fläche zweiter Ordnung im dreidimensionalen Raume $t = 0$; $z = 0$ ist die Gleichung der Tangentialebene in $t = 0$, und die Gleichung der Ergänzungsfläche, auf diese als Coordinatenebene bezogen, lautet wie bekannt

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

§ 4. Meusnier'sches Theorem, geodätische Krümmung.

Im Folgenden mögen x, y die unabhängig, z, t die abhängig Veränderlichen darstellen. Zu dem Flächenpunkt I mit den Coordinaten x, y, z, t erhält man den benachbarten K, indem man x und y bzgl. um dx und dy wachsen lässt. Lässt man x um $2dx + d^2x$, y um $2dy + d^2y$ wachsen, so erhält man den auf K folgenden Punkt L. Einen zweiten K benachbarten Punkt M bekommt man, wenn man x um $2dx + \delta^2x$, y um $2dy + \delta^2y$ wachsen lässt. Dabei sind

d^2x, d^2y, δ^2x, δ^2y beliebige unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung. Dieselben sollen nun so gewählt werden, dass die drei Elemente IK, KL und KM einander gleich werden. Man verlängere weiter IK über K um sich selbst und beschreibe in dem dreidimensionalen Raum, der durch die vier Punkte I, K, L, M bestimmt ist, aus K mit Radius IK eine Kugel. Man erhält so ein sphärisches Dreieck LNM, das aber wegen der Kleinheit sämtlicher Seiten als ebenes betrachtet werden kann. Die Punkte I, K, L, M, N haben nun zu Coordinaten:

$I\,(x, y, z, t)$; $K\,(x+dx, y+dy, ..)$; $L\,(x+2dx+d^2x, y+2dy+d^2y, ..)$;
$M\,(x+2dx+\delta^2x,\ y+2dy+\delta^2y, \ldots)$; $N\,(x+2dx,\ y+2dy, \ldots)$.

Damit nun $\overline{KL} = \overline{IK}$ ist, muss sein

$$dds = 0,$$

oder

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z + dtd^2t = 0; \qquad (1)$$

ebenso, da $\overline{KM} = \overline{IK}$

$$dx\delta^2x + dy\delta^2y + dz\delta^2z + dt\delta^2t = 0. \qquad (2)$$

$\overline{IK}$ und $\overline{KL}$ seien nunmehr zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, die durch einen Normalraum in I aus der Fläche ausgeschnitten wird. Ein beliebiger anderer durch das Element $\overline{IK}$ gehender Raum schneide aus der Fläche eine Kurve, deren auf $\overline{IK}$ folgendes Element KM sein möge. Bezeichnet man ferner die Seiten des Dreiecks LNM bzgl. mit l, n, m und den Winkel der beiden Schmiegungsebenen IKL und $\overline{IKM}$ d. h. den Winkel LNM mit φ, so ist

$$m^2 = \Sigma(d^2x)^2;\ l^2 = \Sigma(\delta^2x)^2;\ n^2 = \Sigma(d^2x - \delta^2x)^2,$$

wobei sich die Summen von x bis t erstrecken.

Es soll nun zuerst bewiesen werden, dass

$$NLM = \frac{\pi}{2}$$

ist, oder dass

$$l^2 = m^2 + n^2$$

oder

$$\Sigma(d^2x)^2 = \Sigma d^2x\delta^2x.$$

Der Punkt I sei der Ursprung des Coordinatensystems, die Flächengleichungen seien in der Form des § 3 (5) gegeben, und der Normalraum $y = 0$ schneide aus der Fläche eine Kurve, von der I, K, L drei auf einander folgende Punkte sind. Es ist nun

$$dz = axdx + b(xdy + ydx) + cydy \qquad (3)$$
$$dt = \alpha xdx + \beta(xdy + ydx) + \gamma ydy. \qquad (4)$$

Für $x = y = z = t = 0$ folgt, da $dy = 0$ ist,

$$dx \quad dx; \; dy \quad dz \quad dt \quad 0.$$

Geht man von K auf der Fläche zu L über, so werden sich dz und dt bzgl. um d^2z und d^2t ändern. Diese Aenderungen erhält man aber, wenn man in (3) und (4) x um $dx + d^2x$, y um $dy + d^2y$ wachsen lässt, wieder $x \quad y \quad 0$ setzt und beachtet, dass $dy \quad 0$ und $d^2y = 0$ ist. Man erhält so

$$d^2z \quad adx^2; \; d^2t \quad \alpha dx^2; \; d^2y \quad 0,$$

und weiter nach (1)

$$d^2x \quad 0.$$

Lässt man andererseits in (3) und (4) x um $dx + \delta^2x$, y um $dy + \delta^2y$ wachsen, d. h. geht man von K auf der Fläche zu M über, so folgt

$$\delta^2z = adx^2; \; \delta^2t = \alpha dx^2,$$

und nach (2)

$$\delta^2x = 0.$$

δ^2y dagegen bleibt willkürlich wählbar. Aus diesen Werten für die zweiten Differentiale folgt aber

$$\Sigma(d^2x)^2 = \Sigma d^2x\delta^2x.$$

Winkel NLM ist somit $= \pi/2$ w. z. b. w.

Nennt man nun die Contingenzwinkel LKN und NKM bzgl. τ_0 und τ_φ, den Krümmungsradius des Normalschnitts IKL mit R_0, den des Schnitts IKM mit R_φ, so ist

$$R_\varphi\tau_\varphi \quad IK; \; l \quad IK.\tau_\varphi$$

und demnach

$$l = \frac{IK^2}{R_\varphi};$$

ebenso

$$m = \frac{IK^2}{R_0}.$$

Da aber

$$m \quad l\cos\varphi,$$

so ist

$$R_\varphi = R_0\cos\varphi.$$

Dies ist das Meusnier'sche Theorem für Flächen im R_4. Dieses zeigt, dass durch Normalräume Kurven von grösserem Krümmungshalbmesser aus der Fläche ausgeschnitten werden als durch andere Räume.

In § 10 werden wir sehen, dass KL die geodätische Verlängerung von IK ist. Ganz ebenso wie für Flächen im dreidimensionalen Raum kann man nun die geodätische Krümmung der Kurve IKM im Punkt I definieren. Nennt man nämlich τ den Contingenzwinkel LKM und definiert man den Radius der geodätischen Krümmung (ρ) durch die Gleichung

$$\rho\tau \quad IK,$$

so ist, da

$$n = \overline{IK}.\tau \quad \text{ist,}$$

$$n = \frac{\overline{IK}^2}{\rho}.$$

Weiter ist

$$n = l \sin\varphi;$$

es folgt also

$$R_\varphi = \rho \sin\varphi \text{ *).}$$

Anmerkung: Da oben gezeigt wurde, dass Winkel $NLM = \pi/2$ ist, so steht die Ebene IKL senkrecht auf der Ebene KLM. Die letztere Ebene ist aber Tangentialebene in K und weicht von der Tangentialebene in I nur um eine unendlich kleine Grösse ab. Deshalb steht die Ebene IKL senkrecht auf der Tangentialebene in I. Ein Normalraum schneidet demnach aus der Fläche eine Kurve aus, deren Schmiegungsebene auf der Tangentialebene senkrecht steht.

§ 5. Krümmung der Normalschnitte, Hauptschnitte.

Wir denken uns im Folgenden die Flächengleichungen in der Form des § 3 (5) gegeben. Man gehe nun vom Nullpunkt längs einer gewissen Kurve auf der Fläche vorwärts, d. h. man betrachte y als Funktion von x. Benützt man die Formel des § 1 für den Krümmungsradius einer Raumkurve, so kann man den Krümmungsradius dieser Kurve im Nullpunkt wie folgt bestimmen. Man sehe x als Parameter an (in § 1 hiess derselbe u), dann ist

$$x' = 1; \; x'' = 0; \; y' = \frac{dy}{dx}; \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$z' = ax + by + (bx + cy)\frac{dy}{dx} \quad (0); \; z'' = a + 2b\frac{dy}{dx} + c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (bx + cy)\frac{d^2y}{dx^2};$$

$$t' = \alpha x + \beta y + (\beta x + \gamma y)\frac{dy}{dx} \quad (0); \; t'' = \alpha + 2\beta\frac{dy}{dx} + \gamma\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\beta x + \gamma y)\frac{d^2y}{dx^2};$$

*) S. Graves, „Crelle's Journal“ Bd. 42, pag. 279.

$$\rho \quad \sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[a+2b\frac{dy}{dx}+c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\alpha+2\beta\frac{dy}{dx}+\gamma\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

$$(x-y \quad z \quad t \quad 0).$$

Wir schneiden nun die Fläche mit dem Normalraum

$$y-\lambda x=0 \text{ oder } y-x\,tg\,\varphi=0, \text{ (d. h. } \lambda=tg\,\varphi)$$

und suchen nach der letzten Formel den Krümmungsradius der ausgeschnittenen Kurve für den Nullpunkt; da $\frac{dy}{dx}=\lambda$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ist, so ist

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2. \qquad (1)$$

Sind in der Entwicklung von $2t$ alle Coefficienten Null, also $\alpha=\beta=\gamma=0$, d. h. liegt die Fläche im R_3 $t=0$, so folgt

$$\frac{1}{\rho_t}=\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{1+\lambda^2}=a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi.$$

Dies ist die bekannte Formel, aus der der Euler'sche Satz für gewöhnliche Flächen abgeleitet zu werden pflegt. Man kann auch sagen

$$2z=ax^2+2bxy+cy^2;\ t=0$$

ist die Projektion der Fläche in den Raum $t=0$ und ρ_t ist der Krümmungshalbmesser der Kurve, die durch $y-\lambda x=0$ aus dieser Projektion ausgeschnitten wird. Ebenso ist

$$\frac{1}{\rho_z}=\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

der reciproke Wert des Krümmungshalbmessers der Kurve, die durch $y-\lambda x=0$ aus der Projektion der Fläche in den Raum $z=0$ ausgeschnitten wird. Es folgt also

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\rho_z{}^2}+\frac{1}{\rho_t{}^2}.$$

Es lässt sich im dreidimensionalen Raum $t=0$ eine Fläche angeben, welche für gleiche $\lambda(=y/x)$ dieselben Krümmungshalbmesser hat wie die Fläche im R_4. Alle Sätze also, die für die Krümmungshalbmesser dieser Fläche gelten, sind auch für unsere Fläche gültig. Die Gleichung der genannten Fläche lautet

$$(2z)^2=(ax^2+2bxy+cy^2)^2+(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)^2.$$

Beweis: Die Ebene $z=0$ ist im Raum $t=0$ Tangentialebene im Nullpunkt O; parallel mit dieser legen wir eine benachbarte Ebene, welche die Z-Axe in O' schneidet. Diese Ebene schneidet

aus der Fläche eine Kurve aus, auf der wir den Punkt P mit den Coordinaten x, y, z annehmen. Wir ziehen $O'P = r$, dann ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Verlängert man PO' um sich selbst über O', so gelangt man zu einem Punkt P', der auch auf der Fläche liegt. Durch OPP' lege man einen Kreis, welcher den Radius ρ haben möge. Ist z sehr klein, so ist ρ der Krümmungsradius des Normalschnitts POP'. Es ist nun

$$z(2\rho - z) = r^2,$$

oder, z^2 gegen z vernachlässigt,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(2z)^2}{r^4}.$$

Nun folgt aber aus der Flächengleichung

$$\frac{(2z)^2}{r^4} = (a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi)^2 + (\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)^2,$$

oder, da $\lambda = tg\,\varphi$,

$$\frac{(2z)^2}{r^4} = \left(\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}. \quad \text{(w. z. b. w.)}$$

Die Form (1) für ρ zeigt, dass im allgemeinen ρ nie Null und nie unendlich wird, d. h. der Krümmungsradius hat für alle Schnitte immer dasselbe Zeichen. In diesem Sinne haben wir also auch keine den Haupttangenten gewöhnlicher Flächen entsprechende Richtungen. Wenn aber die Ausdrücke:

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 \text{ und } \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$$

für einen Wert von λ gleichzeitig verschwinden, oder, was dasselbe ist, die Resultante dieser beiden Formen

$$4(ac - b^2)(\alpha\gamma - \beta^2) - (ac + a\gamma - 2b\beta)^2 = 0$$

ist, so wird ein Krümmungshalbmesser unendlich gross. Wir haben dann einen Flächenpunkt mit besonderen Eigenschaften, den wir in Uebereinstimmung mit späteren Bezeichnungen einen Punkt mit parabolischer Krümmung nennen.

Um nun die Maximal- bzw. Minimal-Werte für den Krümmungshalbmesser zu erhalten, bilden wir mit Hilfe von (1)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0.$$

Unter Weglassung von Faktoren, die von Null verschieden sind, erhält man so die Gleichung

$$[a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b] + [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung vierten Grades in λ bestimmt die Fortschreitungsrichtungen für die Hauptschnitte, d. h. die Normalräume, welche Raumkurven mit maximaler bzw. minimaler Krümmung aus der Fläche schneiden. Wir haben also vier Hauptkrümmungshalbmesser, während Flächen im dreidimensionalen Raum deren nur zwei besitzen. Bedenkt man, dass bei gewöhnlichen Flächen zwei Krümmungshalbmesser unendlich gross sind, und rechnet diese den Hauptkrümmungshalbmessern zu, so hat man im ganzen auch vier Hauptkrümmungshalbmesser. In der That, wendet man (2) auf eine Fläche im dreidimensionalen Raum $t = 0$ an und setzt demnach $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so erhält man zur Bestimmung der Hauptschnitte die Gleichung

$$(a + 2b\lambda + c\lambda^2)[b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b] = 0.$$

Der erste Faktor, mit Null verglichen, gibt aber die beiden Werte von λ für die Asymptotenrichtungen, der zweite Faktor die beiden Werte von λ, die den Krümmungslinien entsprechen.

Verschwinden für einen Wert von λ die beiden Formen $a + 2b\lambda + c\lambda^2$ und $\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$ gleichzeitig (parabolischer Punkt), so wird durch diesen Wert die Gleichung (2) befriedigt; in einem solchen Punkt gibt es daher nur drei endliche Hauptkrümmungshalbmesser. In diesem Fall werden durch den entsprechenden Normalraum $y - \lambda x = 0$ aus den Flächen, die durch Projektion der Fläche in die Räume $z = 0$ und $t = 0$ entstehen (Projektionsflächen), gleichzeitig Asymptotenrichtungen ausgeschnitten. Ebenso sieht man, dass, wenn ein Normalraum aus einer der Projektionsflächen eine Asymptotenrichtung, aus der andern die Richtung einer Krümmungslinie oder aus beiden Richtungen von Krümmungslinien ausschneidet, dieser Raum ein Hauptschnittraum ist. Diese Verhältnisse sollen in § 11 weiter untersucht und namentlich die Frage erörtert werden, wann Hauptkrümmungshalbmesser gleich werden (Nabelpunkte). Insbesondere wird für die Hauptkrümmungsmittelpunkte eine geometrische Konstruktion angegeben werden.

§ 6. Schnitt konsekutiver Normalebenen. Charakteristik. Asymptotenrichtungen.

Sind die Coordinaten der Fläche als Funktionen zweier variabler Parameter (u, v) gegeben, so lauten nach § 3 die Gleichungen der Normalebene in einem Flächenpunkt (x, y, z, t)

$$(X-x)x_1+(X-y)y_1+(Z-z)z_1+(T-t)t_1=0 \quad (1)$$
$$(X-x)x_2+(Y-y)y_2+(Z-z)z_2+(T-t)t_2=0. \quad (2)$$

Den Schnittpunkt dieser Normalebene mit der eines benachbarten Punkts erhält man, indem man (1) und (2) differenziert, also

$$(X-x)dx_1+(Y-y)dy_1+(Z-z)dz_1+(T-t)dt_1=Edu+Fdv \quad (3)$$
$$(X-x)dx_2+(Y-y)dy_2+(Z-z)dz_2+(T-t)dt_2=Fdu+Gdv. \quad (4)$$

Dabei sind E, F, G die in § 2 definierten Fundamentalgrössen erster Ordnung. Man löse die Gleichungen (1)—(4) bzgl. nach $X-x$, $Y-y$, etc. auf, man erhält so z. B.

$$X-x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & y_2 & z_2 & t_2 \\ Edu+Fdv & dy_1 & dz_1 & dt_1 \\ Fdu+Gdv & dy_2 & dz_2 & dt_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 & dt_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 & dt_2 \end{vmatrix}}.$$

Führt man die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung des § 2 ein, so ist, da $dx_1=x_{11}du+x_{12}dv$ etc.,

$$(X-x)=\frac{(Edu+Fdv)(d_x'du+d_x''dv)-(Fdu+Gdv)(d_xdu+d_x'dv)}{edu^2+2fdudv+gdv^2},$$

oder

$$X-x=\frac{(Ed_x'-Fd_x)du^2+(Ed_x''-Gd_x)dudv+(Fd_x''-Gd_x')dv^2}{edu^2+2fdudv+gdv^2}.$$

Ebenso

$$\left.\begin{aligned} Y-y&=\frac{(Ed_y'-Fd_y)du^2+(Ed_y''-Gd_y)dudv+(Fd_y''-Gd_y')dv^2}{edu^2+2fdudv+gdv^2} \\ Z-z&=\ldots \\ T-t&=\ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Jeder Fortschreitungsrichtung (du, dv) auf der Fläche entspricht nach (5) ein bestimmter Punkt in der Normalebene des Flächenpunkts (x, y, z, t). Durchläuft $\frac{du}{dv}$ alle Werte, d. h. schneidet man die Normalebenen aller Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve auf der Fläche, die den Flächenpunkt (x, y, z, t) umgibt, mit der Normalebene des letzteren, so wird in dieser eine Kurve zweiter Ordnung erzeugt, die wir „Charakteristik“ nennen. In § 11 werden wir nämlich sehen, dass dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhält-

nisse im Flächenpunkt vollständig charakterisiert, ähnlich wie die Indikatrix gewöhnlicher Flächen. Die Gleichungen dieser Charakteristik sind durch (5) gegeben, indem man du, dv als variable Parameter ansieht. In der obigen Entwicklung war vorausgesetzt, dass

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \tag{6}$$

von Null verschieden ist. Ist aber diese Form gleich Null, so erhält man offenbar für X, Y, Z, T unendlich grosse Werte, oder die Form (6) mit Null verglichen gibt die beiden Werte von $\frac{du}{dv}$, denen in der Charakteristik die Asymptotenrichtungen entsprechen. Das Vorzeichen der Grösse

$$eg - f^2$$

wird also entscheiden, ob die Charakteristik eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist.

Wendet man die Gleichung (5) für die Fläche in der Form des § 3 (5) an:

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

und betrachtet demnach x und y als die veränderlichen Parameter u und v, so erhält man für die Charakteristik im Nullpunkt die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X = 0; \quad Z &= -\frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)} \\ Y = 0; \quad T &= -\frac{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dabei ist $y/x = \lambda$ gesetzt. Jedem Werte von λ oder jedem Element, das der Normalraum $y - \lambda x = 0$ aus der Fläche schneidet, entspricht demnach ein Punkt M der Charakteristik (7), die in der Normalebene des Nullpunkts liegt. Die Kurve, die der Normalraum $y - \lambda x = 0$ aus der Fläche schneidet, hat im Nullpunkt O eine Schmiegungsebene von bestimmter Lage, und wir wollen nun den Winkel bestimmen, den OM mit dieser Schmiegungsebene macht.

Nach § 1 lautet für den Nullpunkt die Gleichung der Schmiegungsebene der Kurve, die der Raum $y - \lambda x = 0$ aus der Fläche schneidet

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a + 2b\lambda + c\lambda^2 & \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\frac{Z}{T} = \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}; \quad Y - \lambda X = 0. \tag{8}$$

Die Gleichungen für OM lauten nach (7)

$$x = y = 0; \quad \frac{z}{t} = -\frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}. \tag{9}$$

Der Winkel v, den diese Gerade im R_3 $y - \lambda x = 0$ mit der Schmiegungsebene (8) macht, ist offenbar das Complement des Winkels, den OM mit der Normalen der Schmiegungsebene in jenem R_3 bildet. Diese Normale erhält man aber, wenn man die Normalebene der Schmiegungsebene im vierdimensionalen Raum mit dem R_3 schneidet. Diese Normalebene zur Schmiegungsebene (8) hat zu Gleichungen

$$y\lambda + x = 0; \; z(a + 2b\lambda + c\lambda^2) + t(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) = 0; \tag{10}$$

denn die erste Gleichung sagt aus, dass der R_3 $y\lambda + x = 0$ senkrecht steht zu dem R_3 $Y - \lambda X = 0$, die zweite, dass der durch sie dargestellte R_3 auf dem R_3 senkrecht steht, den die erste Gleichung von (8) repräsentiert. Die oben genannte Normale zur Schmiegungsebene erhält man nun durch Schnitt von (10) mit $y - \lambda x = 0$. Da $1 + \lambda^2$ von Null verschieden ist, so lautet die Gleichung dieser Normalen

$$x = y = 0; \; z(a + 2b\lambda + c\lambda^2) + t(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) = 0. \tag{11}$$

Der Winkel, den (9) und (11) mit einander bilden, ist $\frac{\pi}{2} - v$ es ist also

$$\sin v = \frac{[\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][b\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] + [a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b]}{\sqrt{[(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2)^2 + (a + 2b\lambda + c\lambda^2)^2][(\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta)^2 + (b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b)^2]}} \tag{12}$$

Für $v = 0$ erhält man die Gleichung (2) des § 5, nämlich

$$[\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (a - \gamma)\lambda - \beta] + [a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b] = 0,$$

also die Werte von λ für die Hauptfortschreitungsrichtungen auf der Fläche. Es ergibt sich also der Satz: Der Schnittpunkt (M) konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnittelements genommen, liegt in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts.

Setzt man hier statt Normalebene Normale, so hat man den analogen bekannten Satz für Flächen im dreidimensionalen Raum. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist, wie die Gleichung (12) zeigt, richtig. Der Punkt M ist in diesem Falle ($v = 0$) offenbar Hauptkrümmungsmittelpunkt; denn M kann auch als der Schnittpunkt zweier Geraden angesehen werden, die auf der Fläche im Anfangs- und Endpunkt jenes Elements senkrecht stehen. Da aber M in der

Schmiegungsebene liegt, so ist M der Schnittpunkt konsekutiver Haupt-Normalen der Raumkurve, die durch den das Element enthaltenden Normalraum aus der Fläche geschnitten wird, und demnach Krümmungsmittelpunkt dieses Hauptschnitts.

Der zweite Fall, den wir betrachten, möge sein, dass OM auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, also $v = \pi/2$. Man erhält so

$$[a + 2b\lambda + c\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha \quad \gamma)\lambda \quad \beta] - [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][b\lambda^2 + (a \quad c)\lambda - b] = 0,$$

oder da

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda & 1 & \lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \equiv [a + 2b\lambda + c\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] - [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b], \qquad (13)$$

so ist auch:

$$(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda) = 0. \qquad (14)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Nenner der Charakteristik (7) und die Jakobi'sche Covariante der beiden quadratischen Formen $a + 2b\lambda + c\lambda^2$ und $\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$. Wie weiter unten gezeigt werden soll, werden durch die zwei Normalräume, die den beiden Werten von λ der Gleichung (14) entsprechen, aus der Fläche zwei Fortschreitungsrichtungen ausgeschnitten, die wohl charakterisiert und in mancher Beziehung den Asymptotenrichtungen der Flächen des dreidimensionalen Raums analog sind. Wir nennen diese Richtungen daher Asymptotenrichtungen. Schon jetzt aber können einige Anklänge an die Eigenschaften der Haupttangenten gewöhnlicher Flächen angeführt werden. Die konsekutiven Normalebenen in der Richtung dieser Elemente sind parallel oder ihr Schnittpunkt fällt in unendliche Entfernung, s. Gleichung (7). Die Richtungen nach diesen unendlich fernen Punkten sind die Richtungen der Asymptoten der Charakteristik, s. Gleichung (7).

Die Eigenschaft, dass für diese Elemente der Strahl OM senkrecht steht zur Schmiegungsebene, erinnert daran, dass für die Asymptotenkurven gewöhnlicher Flächen die Flächennormale senkrecht auf der Schmiegungsebene steht.

Die Gleichung (5) bestimmt für einen beliebigen Flächenpunkt (x, y, z, t) die Asymptotenrichtungen durch die Gleichung

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0. \qquad (15)$$

§ 7. Involution auf der Fläche. Einteilung der Flächenpunkte.

Die Flächengleichungen seien in der Form des § 3 (5) gegeben

also
$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Die Tangentialebene in einem Punkt einer Fläche des dreidimensionalen Raums schneidet aus dieser eine Kurve aus, die im Berührungspunkt einen Doppelpunkt besitzt. Aehnliches ist für Flächen im R_4 der Fall, indem jeder Tangentialraum

$$z - \varkappa t = 0 \text{ oder } z - t\,tg\,\varphi = 0$$

($\varkappa = tg\,\varphi$) eine Raumkurve aus der Fläche schneidet, die im Berührungspunkt einen singulären Punkt besitzt. Das Tangentenpaar in diesem Punkt wird ausgeschnitten durch die beiden Normalräume, welche durch

$$(a - \varkappa\alpha)x^2 + 2(b - \varkappa\beta)xy + (c - \varkappa\gamma)y^2 = 0$$

bestimmt sind. Schneidet man, drei verschiedenen Werten von $\varkappa$ ($\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$) entsprechend, die Fläche mit drei Tangentialräumen, so schneiden diese zusammen sechs Linienelemente aus der Fläche, die durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$(a - \varkappa_1\alpha)x^2 + 2(b - \varkappa_1\beta)xy + (c - \varkappa_1\gamma)y^2 = 0$$
$$(a - \varkappa_2\alpha)x^2 + 2(b - \varkappa_2\beta)xy + (c - \varkappa_2\gamma)y^2 = 0$$
$$(a - \varkappa_3\alpha)x^2 + 2(b - \varkappa_3\beta)xy + (c - \varkappa_3\gamma)y^2 = 0.$$

Da die Resultante dieser drei quadratischen Formen identisch verschwindet, so liegen die sechs Elemente in Involution*). Hält man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ fest, so beschreiben, bei veränderlichem $\varkappa_3$, die letzten zwei Elemente eine Involution. Die einfach unendliche Schar von Tangentialräumen paart also die von dem Nullpunkt ausgehenden Linienelemente der Fläche involuturisch.

Im Folgenden werden wiederholt die Invarianten der beiden quadratischen Formen

$$f_1 \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$f_2 \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

auftreten, und wir setzen daher zur Abkürzung

$D_{11} \equiv ac - b^2$ Discriminante von f_1
$D_{22} \equiv \alpha\gamma - \beta^2$ „ „ f_2
$D_{12} \equiv a\gamma + \alpha c - 2b\beta$ Simultaninvariante beider Formen oder die zweite Ueberschiebung von f_1 über f_2.

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 58.

$$\vartheta_{12} \equiv \begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ \alpha x+\beta y & \beta x+\gamma y \end{vmatrix};$$

ϑ_{12} ist die Funktionaldeterminante der beiden Formen oder die erste Ueberschiebung von f_1 über f_2.

$R \equiv D_{12}^2 - 4D_{11}D_{22}$, Resultante von f_1 und f_2.

Die oben erwähnte Involution hat zur Gleichung

$$f_1 - \varkappa f_2 = 0,$$

wobei $\varkappa$ variabel ist. Setzt man die Discriminante dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die beiden Werte von $\varkappa$ ($\varkappa_1$, $\varkappa_2$) für die Doppelstrahlen durch die Gleichung

$$D_{22}\varkappa^2 - D_{12}\varkappa + D_{11} = 0,$$

oder

$$\varkappa = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}} = tg\,\varphi_1. \qquad (1)$$

Die Gleichung für die Doppelstrahlen selbst erhalten wir, indem wir bilden

$$(f_1 - \varkappa_1 f_2)(f_1 - \varkappa_2 f_2) = f_1^2 - (\varkappa_1 + \varkappa_2) f_1 f_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 f_2^2 = 0,$$

oder

$$D_{22} f_1^2 - D_{12} f_1 f_2 + D_{11} f_2^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber $-\vartheta_{12}^2$ *). Die Doppelstrahlen sind also durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ \alpha x+\beta y & \beta x+\gamma y \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Oder die Doppelstrahlen der oben erwähnten Involution sind die in § 6 definierten Asymptotenrichtungen. Diese Doppelstrahlen können als Analogie der Doppelstrahlen der Involution in der Indikatrix gewöhnlicher Fläche gelten, und die Benennung „Asymptotenrichtungen" scheint somit gerechtfertigt. Die zwei Tangentialräume, welche diese ausschneiden ($z - \varkappa_1 t = 0$; $z - \varkappa_2 t = 0$), sollen „Asymptotenräume" heissen.

Die Invariantentheorie lehrt (Clebsch § 57), dass die Funktionaldeterminante mit Null verglichen Elemente liefert, die von allen Involutionspaaren harmonisch getrennt werden. Die Involutionspaare werden daher wie bei gewöhnlichen

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 57.

Flächen durch die Asymptotenrichtungen harmonisch getrennt.

Je nachdem nun $R \gtrless 0$, erhält man $\begin{cases} \text{reelle und getrennte} \\ \text{„ „ zusammenfallende} \\ \text{imaginäre} \end{cases}$

Doppelstrahlen. Im ersten Falle ($R>0$) nennen wir den Flächenpunkt einen hyperbolischen, im zweiten Falle einen parabolischen, im dritten Falle einen elliptischen Punkt. Im parabolischen Punkt ist wie bei Flächen im dreidimensionalen Raum ein Haupt-Krümmungshalbmesser unendlich gross s. § 5.

Da nach § 6, (15) in einem allgemeinen Flächenpunkt (x, y, z, t) die Asymptotenrichtungen durch die Gleichung

$$edu^2+2fdudv+gdv^2 = 0$$

bestimmt sind, so ist dieser ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Punkt, je nachdem f^2-eg grösser, gleich oder kleiner als Null ist. Diese Einteilung der Flächenpunkte scheint durch die grosse Analogie mit den Verhältnissen auf gewöhnlichen Flächen gerechtfertigt. Ausserdem ist die Charakteristik nach § 6 eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Punkt ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer ist.

In der oben genannten Involution gibt es auch ein Paar von Strahlen, die aufeinander senkrecht stehen; der zugehörige Wert von k bestimmt sich aus der Gleichung

$$(a-\varkappa\alpha)+(c-\varkappa\gamma) = 0.$$

$$\varkappa = \frac{a+c}{\alpha+\gamma} = tg\,\varphi. \tag{2}$$

Wir bilden nunmehr Paare von Tangentialräumen, welche aus der Fläche vier harmonische Strahlen ausschneiden; es zeigt sich, dass die Tangentialräume dadurch involutorisch gepaart werden.

Damit die vier Linienelemente, welche durch die beiden Gleichungen

$$(a-\varkappa\alpha)x^2+2(b-\varkappa\beta)xy+(c-\varkappa\gamma)y^2 = 0,$$
$$(a-\varkappa_1\alpha)x^2+2(b-\varkappa_1\beta)xy+(c-\varkappa_1\gamma)y^2 = 0$$

bestimmt sind, sich harmonisch trennen, muss die Simultaninvariante der beiden Formen verschwinden (s. Clebsch § 57), also

$$(a-\varkappa\alpha)(c-\varkappa_1\gamma)+(a-\varkappa_1\alpha)(c-\varkappa\gamma)-2(b-\varkappa\beta)(b-\varkappa_1\beta) = 0,$$

oder

$$2\varkappa\varkappa_1 D_{22}-(\varkappa+\varkappa_1)D_{12}+2D_{11} = 0.$$

Durch diese Relation werden aber die Tangentialräume involutorisch einander zugeordnet*).

Für $\varkappa = \varkappa_1$ erhält man die Doppelräume dieser Involution, also

$$\varkappa = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}}.$$

Nach (1) sind dies die Asymptotenräume.

Die Rechtwinkelräume erhält man indem man $\varkappa = -1/\varkappa_1$ setzt, also

$$(1 - \varkappa^2)D_{12} + 2\varkappa(D_{11} - D_{22}) = 0;$$

da $\varkappa = tg\,\varphi$, so ist

$$tg\,2\varphi = \frac{D_{22}}{D_{22} - D_{11}}. \tag{3}$$

Dadurch sind zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, die aus der Fläche vier harmonische Linienelemente ausschneiden, und von den Asymptoten-Räumen harmonisch getrennt werden. Wir nennen diese beiden Räume mit späterer Begründung „Hauptkrümmungsräume."

Anmerkung: Im parabolischen Punkt ($R = 0$) fallen, wie eine kleine Rechnung zeigt, die beiden Asymptotenräume zusammen mit einem Hauptkrümmungsraum.

§ 8. Conjugierte Richtungen.

Die Flächengleichungen mögen in der Form

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots$$

gegeben sein s. § 3. Die Gleichungen der Tangentialebene im Punkt $(x, y,)$ lauten nach § 3

$$X - x = \alpha_1$$
$$Y - y = \beta_1$$
$$Z - z = \alpha_1(ax + by + \ldots) + \beta_1(bx + cy + \ldots)$$
$$T - t = \alpha_1(\alpha x + \beta y + \ldots) + \beta_1(\beta x + \gamma y + \ldots),$$

oder nach Elimination der Parameter α_1, β_1

$$Z - z = (X - x)(ax + by + \ldots) + (Y - y)(bx + cy + \ldots)$$
$$T - t = (X - x)(\alpha x + \beta y + \ldots) + (Y - y)(\beta x + \gamma y + \ldots).$$

*) Salmon, anal. Geom. der Kegelschnitte, Art. 93.

Der Punkt (x, y) möge nun dem Nullpunkt unendlich benachbart liegen; die Gleichungen der Tangentialebene in diesem lauten dann

$$Z = X(ax+by)+Y(bx+cy)$$
$$T = X(\alpha x+\beta y)+Y(\beta x+\gamma y).$$

Diese schneiden wir nun mit der Tangentialebene des Nullpunkts $Z = T = 0$, dann ist

$$\begin{aligned} Z &= 0; \qquad X(ax+by)+Y(bx+cy) = 0 \\ T &= 0; \qquad X(\alpha x+\beta y)+Y(\beta x+\gamma y) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Da x und y unabhängig variabel sind, so ist die Jakobi'sche Determinante im Allgemeinen von Null verschieden; daraus folgt, dass die beiden konsekutiven Tangentialebenen im Allgemeinen nur den Nullpunkt gemein haben. Ist aber die Jakobi'sche Determinante gleich Null d. h. gehen wir vom Nullpunkt in den Asymptotenrichtungen auf der Fläche vorwärts, so schneiden sich die beiden konsekutiven Tangentialebenen in einer Geraden, deren Gleichungen

$$Z = T = 0, \qquad X(ax+by)+Y(bx+cy) = 0 \tag{2}$$

sind. Entsprechend den beiden Werten von $\frac{y}{x}$, welche die Jakobi'sche Determinante mit Null verglichen gibt, erhält man so zwei Gerade als Schnitt konsekutiver Tangentialebenen. Die Gleichungen dieses Geradenpaars erhält man durch Elimination von x, y aus (2) und der Jakobi'schen Determinante oder, was dasselbe ist, durch Elimination aus (1), also

$$\begin{vmatrix} aX+bY & bX+cY \\ \alpha X+\beta Y & \beta X+\gamma Y \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist wieder die Jakobi'sche Determinante.. Für ein y/x, das der Determinante genügt, erhält man so ein Y/X, das derselben Determinante genügt; diese beiden Werte müssen aber verschieden sein, ist y/x die eine Wurzel, so ist Y/X die andere; denn sonst wäre nach (2)

$$x(ax+by)+y(bx+cy) = 0 \text{ oder } ax^2+2bxy+cy^2 = 0;$$

y/x müsste also dieser Gleichung und der Jakobi'schen Determinante zugleich genügen, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Man kann demnach den Satz aussprechen:

Geht man von einem Flächenpunkt längs einer Asymptotenrichtung auf der Fläche vorwärts und schneidet die Tangentialebene des Ausgangspunkts

mit der darauf folgenden, so schneiden sich diese beiden in der andern Asymptotenrichtung. In einem Flächenpunkt des dreidimensionalen Raums gibt es eine ganze Involution von „konjugierten" Richtungen, in einem Flächenpunkt des R_4 gibt es nur zwei „konjugierte" Richtungen (Asymptotenrichtungen).

§ 9. Projektion der Fläche in Tangentialräume. Biegungsinvariante.

Die Fläche habe wieder zu Gleichungen

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Man drehe die Coordinatenräume $z = 0$ und $t = 0$ um die Tangentialebene um den Winkel φ und setze demnach

$$z = t_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi$$
$$t = t_1 \cos\varphi - z_1 \sin\varphi;$$

man erhält so

$$\begin{aligned} 2z_1 &= (a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)x^2 + 2(b\cos\varphi - \beta\sin\varphi)xy + (c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi)y^2 \\ 2t_1 &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)x^2 + 2(b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)xy + (c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Projection der Fläche in den Tangentialraum $z_1 = 0$ (Projectionsfläche) hat zu Gleichungen

$$\begin{aligned} 2t_1 &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)x^2 + 2(b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)xy + (c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)y^2 \\ z_1 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser dieser Fläche seien ρ_1 und ρ_2, dann ist die mittlere Krümmung bestimmt durch

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = (a + c)\sin\varphi + (\alpha + \gamma)\cos\varphi.$$

Dieser Wert ist ein Maximum, wenn φ der Gleichung

$$(a + c)\cos\varphi - (\alpha + \gamma)\sin\varphi = 0$$

genügt oder

$$tg\varphi = \frac{a + c}{\alpha + \gamma}.$$

Projiciert man also die Fläche in den Raum $z_1 = 0$ oder

$$\frac{z}{t} = tg\varphi = \frac{a + c}{\alpha + \gamma},$$

so erhält man eine Fläche mit maximalem Wert der mittleren Krümmung. Dies ist aber nach § 7 (2) der Tangentialraum, der in der dort genannten Involution die Rechtwinkel-Strahlen ausschneidet. Für den Raum, der auf letzterem senkrecht steht, ist

$$tg\varphi = -\frac{\alpha+\gamma}{a+c};\ \sin\varphi = -\frac{(\alpha+\gamma)}{\sqrt{(a+c)^2+(\alpha+\gamma)^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{a+c}{\sqrt{(a+c)^2+(\alpha+\gamma)^2}}.$$

Für diesen Wert von φ ist aber

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=0.$$

Dieser Raum gibt demnach eine Projektionsfläche mit der mittleren Krümmung Null*).

Projiciert man die Fläche auf zwei zu einander senkrechte Tangentialräume und sind die Hauptkrümmungsradien der beiden Projectionsflächen bzgl. ρ_1, ρ_2; ρ_1'; ρ_2', so ist

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1'^2}+\frac{1}{\rho_2'^2}$$

eine constante Grösse**).

Beweis: Die Fläche $2z_1 = Ax^2+2Bxy+Cy^2$ im R_3 $t_1=0$ habe die Hauptkrümmungshalbmesser R_1 und R_2, dann ist

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=A+C;\ \frac{1}{R_1R_2}=AC-B^2;\ \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=A^2+C^2+2B^2.$$

Projiciert man nun die Fläche des vierdimensionalen Raums in $z_1=0$ und $t_1=0$ und bildet obige Summe, so ergibt sich

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1'^2}+\frac{1}{\rho_2'^2}=a^2+\alpha^2+c^2+\gamma^2+2b^2+2\beta^2.$$

Diese Summe ist aber von φ unabhängig und der Satz ist somit bewiesen.

Man projiciere die Fläche wieder auf zwei auf einander senkrechte Tangentialräume und suche für die beiden Projectionsflächen das Krümmungsmass $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ und $\frac{1}{\rho_1'\rho_2'}$. Es zeigt sich, dass die Summe

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}+\frac{1}{\rho_1'\rho_2'}$$

*) Killing, Nicht-Euklidische Raumformen, pag. 244.

**) ibid. pag. 245.

unabhängig von der Lage der zwei Räume ist; denn projiciert man die Fläche in die Räume $z_1 = 0$ und $t_1 = 0$ und bildet die obige Summe für die beiden Projectionsflächen, so ist

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1'\rho_2'} = (a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)(c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi) - (b\cos\varphi - \beta\sin\varphi)^2 +$$
$$(a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)(c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi) - (b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1'\rho_2'} = (ac - b^2) + (\alpha\gamma - \beta^2).$$

Diese Summe ist unabhängig von φ w. z. b. w.

Hovestadt*) beweist, dass in einem allgemeinen Flächenpunkt (x, y, z, t), dem die Parameterwerte u, v entsprechen

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1'\rho_2'} = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}.$$

Diese Grösse ist aber gleich dem Krümmungsmass einer Fläche des dreidimensionalen Raums, die dasselbe Linienelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

wie die Fläche im R_4 besitzt**).

Da die Grösse $\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1'\rho_2'}$ durch die Grössen E, F, G und ihre ersten und zweiten Ableitungen nach den beiden Veränderlichen u, v ausgedrückt werden kann, so ändert sie sich nicht bei jeder Deformation der Fläche, welche ohne Dehnung und Faltung erfolgt. Man nennt daher diese Grösse eine „Biegungsinvariante".

*) Hovestadt, Programm des Münster'schen Realgymnasiums 1880.

**) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Art. 11. Salmon, Analytische Geometrie des Raums, Art. 174.

Nach Monro*) ist ein Flächenelement einer Fläche in der Umgebung eines Punkts auf ein Flächenelement einer andern Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte dann abwickelbar, wenn jene Biegungsinvarianten in den beiden entsprechenden Punkten gleich sind.

Projiciert man die Fläche in den Raum $z_1 = 0$ und bildet das Krümmungsmass der Projektionsfläche, so erhält man

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = (ac-b^2)sin^2\varphi + (\alpha c + a\gamma - 2b\beta)sin\varphi cos\varphi + (\alpha\gamma - \beta^2)cos^2\varphi,$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = D_{11}sin^2\varphi + D_{12}sin\varphi cos\varphi + D_{22}cos^2\varphi.$$

Variiert φ, so erhält man die den verschiedenen Tangentialräumen entsprechenden Projektionsflächen. Das Krümmungsmass dieser Flächen variiert dann offenbar wie die reciproken Krümmungsradien folgender im dreidimensionalen Raum $t = 0$ gelegenen Fläche

$$2z = D_{22}x^2 + D_{12}xy + D_{11}y^2.$$

Alles also, was für die Krümmungsradien der Normalschnitte gewöhnlicher Flächen gilt, findet für das Krümmungsmass der Projektionsflächen die entsprechende Interpretation. Insbesondere erhält man zwei stationäre Werte für das Krümmungsmass entsprechend den Hauptkrümmungsradien gewöhnlicher Flächen, weiter Krümmungsmasse mit dem Wert Null entsprechend den Normalschnitten, welche aus Flächen im R_3 die Haupttangenten ausschneiden, und endlich ein Analogon des Euler'schen Satzes.

Die Tangentialräume, deren Projektionsflächen einen stationären Wert des Krümmungsmasses besitzen, erhält man durch die Gleichung

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}\right)}{d\varphi} = 0, \text{ oder}$$

$$2[(ac-b^2)-(\alpha\gamma-\beta^2)]sin\varphi cos\varphi + (\alpha c + a\gamma - 2b\beta)(cos^2\varphi - sin^2\varphi) = 0,$$

oder

$$tg2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22}-D_{11}}.$$

Das sind aber die § 7 (3) definierten „Hauptkrümmungsräume“ **). Es existieren also zwei auf einander senkrechte Tangentialräume (Hauptkrümmungsräume),

*) Monro, On flexure of spaces, Mathematical Society, Vol. IX, p. 175.

**) Diese Bezeichnung gebraucht Hovestadt, Programm des Münster'schen Realgymnasiums 1880.

in welche die Fläche projiciert Projektionsflächen mit maximalem oder minimalem Wert des Krümmungsmasses gibt*). Die beiden Hauptkrümmungsräume schneiden aus der Fläche vier harmonische Linienelemente aus. Die stationären Werte für das Krümmungsmass sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}\right)^2 - (D_{11}+D_{22})\frac{1}{\rho_1\rho_2} - \frac{R}{4} = 0. \tag{3}$$

Die Projektionsflächen mit dem Krümmungsmass Null erhält man durch die Gleichung

$$D_{11}sin^2\varphi + D_{12}sin\varphi cos\varphi + D_{22}cos^2\varphi = 0,$$

$$tg\varphi = \frac{-D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}. \tag{4}$$

Dadurch sind zwei Tangentialräume „Nullräume“ definiert, welche, wie man sieht, auf den Asymptotenräumen des § 7 senkrecht stehen. Die entsprechenden Projektionsflächen haben das Krümmungsmass gleich Null. Die Winkel der Nullräume (also auch die der Asymptotenräume) werden durch die Hauptkrümmungsräume halbiert. Im hyperbolischen Punkt hat man demnach zwei verschiedene Projektionsflächen mit dem Krümmungsmass Null, ebenso wie im hyperbolischen Punkt gewöhnlicher Flächen zwei verschiedene Normalschnitte Kurven mit der Krümmung Null aus der Fläche schneiden. Im elliptischen Punkt sind die Nullräume imaginär, es existieren demnach keine Projektionsflächen mit dem Krümmungsmass Null. Im parabolischen Punkt ($R = 0$) endlich fallen beide Nullräume zusammen und zwar mit einem Hauptkrümmungsraum. Denn da $R = 0$, so erhält man für die Nullräume eines solchen Punkts

$$ctg\varphi = \frac{2D_{11}}{D_{12}};\quad tg\varphi = -\frac{2D_{22}}{D_{12}};\quad \frac{ctg\varphi - tg\varphi}{2} = \frac{D_{22}-D_{11}}{D_{12}},$$

$$tg\,2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22}-D_{11}}.$$

Dies war aber die Gleichung, welche die Neigungen für die Hauptkrümmungsräume gab. Auch zeigt die Gleichung (3), dass die Projektionsfläche eines Hauptkrümmungsraums im parabolischen Punkt das Krümmungsmass Null besitzt. Man sieht die weitgehende Analogie zwischen den Flächen im R_4 und den Flächen im R_3.

*) Killing, Nicht-Euklidische Raumformen, p. 248.

§ 10. Die Linien auf der Fläche.

Im Folgenden mögen die Coordinaten der Fläche als Funktionen zwei variabler Parameter u, v gegeben sein. Wir sahen in § 5, dass es in jedem Punkt der Fläche vier ausgezeichnete Richtungen (Hauptschnittsrichtungen) gibt. Verfolgt man diese von Punkt zu Punkt, so erhält man ein vierfach unendliches System von Linien auf der Fläche, die wir **„Krümmungslinien"** nennen.

Die Differentialgleichung dieser Linien erhält man durch Benützung des Satzes in § 6, welcher aussagt, dass der Schnittpunkt konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnittelements genommen, in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts liegt. Der Normalraum, der das den Zuwüchsen du, dv entsprechende Linienelement im Punkt (u, v) enthält, schneidet aus der Fläche eine Raumkurve, deren Schmiegungsebene im Punkt (u, v) nach § 1 folgende Gleichung hat

$$X - x = \alpha x' + \beta x''; \quad Y - y = \alpha y' + \beta y''; \text{ etc.}$$

Dabei sind α, β Parameter. Da v Funktion von u ist, so lauten diese Gleichungen ausführlicher geschrieben

$$X - x = \alpha x_1 + \beta\left(\frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du}\frac{dv}{du}\right) + x_2\left(\alpha\frac{dv}{du} + \beta\frac{d^2v}{du^2}\right)$$

$$Y - y = \alpha y_1 + \beta\left(\frac{dy_1}{du} + \frac{dy_2}{du}\frac{dv}{du}\right) + y_2\left(\alpha\frac{dv}{du} + \beta\frac{d^2v}{du^2}\right)$$

$$Z - z = \alpha z_1 + \ldots$$

$$T - t = \alpha t_1 + \ldots$$

Durch Elimination von α, β und $\alpha\frac{dv}{du} + \beta\frac{d^2v}{du^2}$ erhält man die Gleichung eines Raums, welcher durch diese Schmiegungsebene geht; diese Gleichung lautet

$$\begin{vmatrix} X-x & x_1 & x_2 & dx_1\,du + dx_2\,dv \\ Y-y & y_1 & y_2 & dy_1\,du + dy_2\,dv \\ Z-z & z_1 & z_2 & dz_1\,du + dz_2\,dv \\ T-t & t_1 & t_2 & dt_1\,du + dt_2\,dv \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

oder mit Einführung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung des § 2

$$\Sigma(X - x)(d_x du^2 + 2d_x' du dv + d_x'' dv^2) = 0, \qquad (2)$$

wobei sich die Summe von x bis t erstreckt. Der durch diese Gleichung dargestellte Raum geht, wie eine kleine Rechnung zeigt, nicht

durch die Normalebene des Flächenpunkts (u, v). Die Gleichungen der Schmiegungsebene können daher auch dargestellt werden durch die Gleichung (2) und die Gleichung des Normalraums durch das den Differentialen du, dv entsprechende Linienelement der Fläche. Liegt nun der durch die Gleichungen (5) des § 6 bestimmte Punkt (X, Y, Z, T) in dieser Schmiegungsebene, so ist jenes Element das Element einer Krümmungslinie. Der Punkt (X, Y, Z, T) liegt nun aber in der Normalebene des Flächenpunkts (u, v) also auch in dem obengenannten Normalraum. Deshalb hat X, Y, Z, T nur noch der Gleichung (2) zu genügen. Man erhält somit als Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$\Sigma(d_x du^2 + 2d_x' du dv + d_x'' dv^2)\{(Ed_x' - Fd_x)du^2 + (Ed_x'' - Gd_x)du dv + (Fd_x'' - Gd_x')dv^2\} = 0, \qquad (3)$$

wo sich die Summe von x bis t erstreckt. Wie zu erwarten, steigt diese Gleichung in $\frac{du}{dv}$ bis zum vierten Grade an.

Für eine Fläche, die im dreidimensionalen Raum $t = 0$ liegt, sind ausser d_t, d_t', d_t'' alle Fundamentalgrössen zweiter Ordnung gleich Null. Schreibt man statt $E, F, G, d_t, d_t', d_t''$ bzgl. e, f, g, d, d', d'', so erhält man aus (3)

$$(d du^2 + 2d' du dv + d'' dv^2)[(ed' - fd)du^2 + (ed'' - gd)du dv + (fd'' - gd')dv^2] = 0.$$

Die Grössen e, f, g, d, d', d'' sind dabei (s. § 2) mit den in der Flächentheorie üblichen Fundamentalgrössen identisch. Der erste Faktor mit Null verglichen gibt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien, die zweite die der Krümmungslinien der im dreidimensionalen Raum $t = 0$ gelegenen Fläche*). Dies stimmt mit der in § 5 gemachten Bemerkung über die Hauptschnitte überein.

Quadriert man Gleichung (1) durch Combination von Colonnen mit Colonnen und beachtet die Gleichungen (1)—(4) des § 6, welche ausdrücken, dass (X, Y, Z, T) der Schnittpunkt der beiden konsekutiven Normalebenen ist, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \Sigma(X-x)^2 & 0 & 0 & Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ 0 & E & F & du\Sigma x_1 dx_1 + dv\Sigma x_1 dx_2 \\ 0 & F & G & du\Sigma x_2 dx_1 + dv\Sigma x_2 dx_2 \\ Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 & du\Sigma x_1 dx_1 + dv\Sigma x_1 dx_2 & du\Sigma x_2 dx_1 + dv\Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

*) Stahl, Kommerell, die Grundformeln der allgem. Flächentheorie, pag. 16 und 18. Die Grössen d, d', d'' sind hier um den Faktor $\frac{1}{(eg-f^2)^{\frac{1}{2}}}$ grösser als die oben genannten (s. pag. 39, Anm.).

Die Summen erstrecken sich von x bis t. $\Sigma(X-x)^2$ ist gleich ρ^2, d. h. gleich dem Quadrat des Hauptkrümmungsradius, der (du, dv) entspricht, die Differentiale du, dv müssen der Gleichung (3) genügen. Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ dx_1du+dx_2dv & dy_1du+dy_2dv & dz_1du+dz_2dv & dt_1du+dt_2dv \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & du\Sigma x_1dx_1+dv\Sigma x_1dx_2 \\ F & G & du\Sigma x_2dx_1+dv\Sigma x_2dx_2 \\ du\Sigma x_1dx_1+dv\Sigma x_1dx_2 & du\Sigma x_2dx_1+dv\Sigma x_2dx_2 & \Sigma(dx_1du+dx_2dv)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ dy_1du+dy_2dv & dz_1du+dz_2dv & dt_1du+dt_2dv \end{vmatrix}^2$$

$$= \Sigma(d_xdu^2+2d_x'dudv+d_x''dv^2)^2.$$

Die einzelnen Glieder der Summen erhält man, indem man in dem Leitglied die Grössen x, y, z, t cyklisch vertauscht. Benützt man die letzten Gleichungen, so erhält man aus (4)

$$\rho^2\Sigma(d_xdu^2+2d_x'dudv+d_x''dv^2)^2=(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)^2(EG-F^2).$$

Die vier Hauptkrümmungshalbmesser in einem Punkt (u, v) der Fläche erhält man demnach, wenn man aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)^2(EG-F^2)}{\Sigma(d_xdu^2+2d_x'dudv+d_x''dv^2)^2} \\ \Sigma(d_xdu^2+2d_x'dudv+d_x''dv^2)\{&(Ed_x'-Fd_x)du^2+(Ed_x''-Gd_x)dudv+ \\ &+(Fd_x''-Gd_x')dv^2\}=0 \end{aligned}\right\} (5)$$

du, dv eliminiert.

Für eine Fläche im dreidimensionalen Raum $t=0$ sind wieder ausser d_t, d_t', d_t'' alle Fundamentalgrössen zweiter Ordnung gleich Null. Schreibt man statt E, F, G, d_t, d_t', d_t'' bzgl. e, f, g, d, d', d'', wo die letzten sechs Grössen mit den in der Flächentheorie gebrauchten Fundamentalgrössen identisch sind, so erhält man aus (5)

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{(edu^2+2fdudv+gdv^2)\sqrt{eg-f^2}}{ddu^2+2d'dudv+d''dv^2}; \\ (ddu^2+2d'dudv+d''dv^2)&[(ed'-fd)du^2+(ed''-gd)dudv+(fd''-gd')dv^2]=0. \end{aligned}\right\} (6)$$

Setzt man den ersten Faktor der zweiten Gleichung von (6) gleich Null, so sieht man, dass für die Differentiale du, dv, die sich aus dieser Gleichung ergeben (Asymptotenrichtungen), ρ unendlich gross wird. Der zweite Faktor gleich Null gesetzt und mit der ersten Gleichung von (6) kombiniert, gibt nach Elimination von du und dv, wie eine kleine Rechnung zeigt,

$$\begin{vmatrix} \rho d - e(eg - f^2)^{\frac{1}{2}} & \rho d' - f(eg - f^2)^{\frac{1}{2}} \\ \rho d' - f(eg - f^2)^{\frac{1}{2}} & \rho d'' - g(eg - f^2)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Dadurch werden aber die beiden Halbkrümmungsmesser einer gewöhnlichen Fläche bestimmt *).

Die **parabolische Linie** auf der Fläche definieren wir als die Verbindungslinie der parabolischen Punkte der Fläche oder der Punkte, in denen ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross wird. Die Gleichung (5) gibt für $\rho = \infty$ die Bedingungen

$$d_x du^2 + 2d_x' dudv + d_x'' dv^2 = 0 \tag{7}$$

$$d_y du^2 + 2d_y' dudv + d_y'' dv^2 = 0 \tag{8}$$

$$d_z du^2 + \ldots = 0 \tag{9}$$

$$d_t du^2 + \ldots = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichungen sind nach (5) notwendig und hinreichend dafür, dass ein Hauptkrümmungshalbmesser im Punkt (u, v) unendlich gross wird. Diese vier Gleichungen (7)—(10) sind aber nicht unabhängig von einander, sondern wenn zwei von ihnen erfüllt sind, so sind die andern identisch erfüllt; denn setzt man

$$\begin{aligned} x_{11} du^2 + 2x_{12} dudv + x_{22} dv^2 &= \vartheta_x \\ y_{11} du^2 + 2y_{12} dudv + y_{22} dv^2 &= \vartheta_y \\ z_{11} du^2 + \ldots &= \vartheta_z \\ t_{11} du^2 + \ldots &= \vartheta_t, \end{aligned}$$

so verschwinden, wie bekannt, in dem unvollständigen System

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ \vartheta_x & \vartheta_y & \vartheta_z & \vartheta_t \end{vmatrix}$$

alle Determinanten, wenn zwei von einander unabhängige von ihnen

*) Salmon, analytische Geometrie des Raums, Art. 59. Stahl, Kommerell, die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, § 5. Gleichung (10). Die dort gebrauchten Grössen d, d', d'' sind um den Faktor $\frac{1}{(eg - f^2)^{\frac{1}{2}}}$ grösser als die obigen; s. ebendort § 1 (23) und § 2 (1).

verschwinden. Die einzelnen Determinanten dieses Systems mit Null verglichen sind aber mit den Gleichungen (7)—(10) identisch. Die Gleichung der parabolischen Linie erhält man also, indem man aus zweien der Gleichungen (7)—(10) die Differentiale du und dv eliminiert. Oder man multipliziere die vier Gleichungen der Reihe nach mit x_{11} und x_{22} und addiere, indem man beachtet, dass $\Sigma x_{11} d_x = 0$ und $\Sigma x_{22} d_x'' = 0$. Diese Summen erstrecken sich von x bis t; sie sind gleich Null, weil sie nach § 2 dargestellt werden können als Determinanten, in denen zwei Horizontalreihen gleich sind. Führt man die angegebene Operation aus, so erhält man

$$2\Sigma x_{11} d_x' du + \Sigma x_{11} d_x'' dv = 0$$
$$\Sigma x_{22} d_x du + 2\Sigma x_{22} d_x' dv = 0.$$

Die Summen sind von x bis t zu erstrecken. Nach § 2 lauten endlich die letzten Gleichungen

$$2e du + 2f dv = 0$$
$$2f du + 2g dv = 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen du, dv, so resultiert als Gleichung der parabolischen Linie

$$eg - f^2 = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung hätte auch erhalten werden können, dadurch dass man die Bedingung aufstellt, dass die beiden Asymptotenrichtungen, die durch die Gleichung

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0$$

[s. § 6 (15)] bestimmt sind, zusammenfallen, oder dass die Charakteristik der Punkte der parabolischen Linie eine Parabel ist. Die parabolische Linie trennt die Gebiete der elliptischen und hyperbolischen Punkte.

Geht man ferner den Asymptotenrichtungen auf der Fläche nach, so erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven, die wir **„Asymptotenkurven“** nennen. Die Differentialgleichung dieser Kurven lautet nach § 6 (15)

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0. \tag{12}$$

Da die Gleichung (11) der parabolischen Linie die singuläre Lösung von (12) ist, so wird, ganz wie bei Flächen im R_3, die parabolische Linie im allgemeinen der Ort der Spitzen, in singulären Fällen ganz oder teilweise die Einhüllende der Asymptotenkurven sein.

Setzt man die aus der Gleichung (3) resultierenden Werte von

$\frac{du}{dv}$ in die Gleichung der Charakteristik § 6 (5) ein, so erhält man den Ort der Hauptkrümmungszentren oder die „Zentrafläche". Dieselbe wird vier Mäntel besitzen.

Unter einer **geodätischen Linie** der Fläche durch zwei Flächenpunkte A und A' verstehen wir die Linie auf der Fläche, welche die Punkte A und A' auf dem kürzesten Weg verbindet. Denken wir uns die Linie gezeichnet und gehen wir auf dieser von A aus bis A' um ds bis B, von B wieder um ds bis C vorwärts, so ist klar, dass ABC der kürzeste Weg auf der Fläche von A nach C sein muss. Die Bedingung hiefür wollen wir aufstellen. Ob nun aber und wann diese Bedingung hinreichend ist dafür, dass auch zwei Punkte A und A' in endlicher Entfernung durch eine Linie verbunden sind, die die kürzeste von allen möglichen ist, wenn für alle ihre Punkte die erwähnte Bedingung besteht, wollen wir hier nicht untersuchen.

Man denke sich zunächst A mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 in endlicher Entfernung von C (x_3, y_3, z_3, t_3). Man konstruiere nun über AC als Basis ein gleichschenkliges Dreieck, das die Spitze B (X, Y, Z, T) in der Fläche hat und dessen Schenkel möglichst klein ist. Nachher lasse man die Punkte A, B, C zusammenrücken und man erhält dann die gesuchte Bedingung. Der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke über AC als Basis ist der Raum, der im Mittelpunkt D von AC auf AC senkrecht steht. Dieser R_3 wird aus der Fläche eine Kurve ausschneiden, auf der B liegen muss. Soll nun AB ein Minimum sein, so muss es auch BD sein, oder BD muss auf der erwähnten Kurve senkrecht stehen. Die Flächengleichungen mögen gegeben sein in der Form $f(xyzt) = 0$; $F(xyzt) = 0$.
Die eben genannte Kurve hat nun zu Gleichungen

$$\Sigma(X - \frac{x_1 + x_3}{2})(x_3 - x_1) = 0; \quad f(XYZT) = 0; \quad F(XYZT) = 0.$$

Diese sowie die nun folgenden Summen erstrecken sich von x bis t. Die Bedingung dafür, dass BD auf der Kurve senkrecht steht, lautet

$$\Sigma(\frac{x_1 + x_3}{2} - X)dX = 0,$$

dabei müssen dX, dY, dZ, dT den differenzierten Kurvengleichungen genügen also

$$\Sigma(x_3 - x_1)dX = 0; \quad \Sigma f'(X)dX = 0; \quad \Sigma F'(X)dX = 0.$$

Aus den letzten vier Gleichungen eliminiere man die Differentiale und erhält die gesuchte Bedingung in der Form

$$\begin{vmatrix} f'(X) & f'(Y) & f'(Z) & f'(T) \\ F'(X) & F'(Y) & F'(Z) & F'(T) \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & t_3 - t_1 \\ \frac{x_1+x_3}{2} - X & \frac{y_1+y_3}{2} - Y & \frac{z_1+z_3}{2} - Z & \frac{t_1+t_3}{2} - T \end{vmatrix} = 0.$$

Statt x_1, y_1, z_1, t_1 setzt man nun x, y, z, t, statt X, Y, Z, T $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $t+dt$, statt x_3, y_3, z_3, t_3 $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, etc., man erhält so aus der letzten Gleichung

$$\begin{vmatrix} f'(x)+df'(x) & f'(y)+df'(y) & f'(z)+df'(z) & f'(t)+df'(t) \\ F'(x)+dF'(x) & F'(y)+dF'(y) & F'(z)+dF'(z) & F'(t)+dF'(t) \\ dx & dy & dz & dt \\ d^2x & d^2y & d^2z & d^2t \end{vmatrix} = 0.$$

Die Glieder niedrigster Ordnung geben, nachdem mit ds^3 durchdividiert worden ist, die Differentialgleichung der geodätischen Linie in der Form

$$\begin{vmatrix} f'(x) & f'(y) & f'(z) & f'(t) \\ F'(x) & F'(y) & F'(z) & F'(t) \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2t}{ds^2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Sind λ, μ, ν drei Parameter, so kann man statt der Gleichung (13) auch schreiben

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda f'(x) + \mu F'(x) + \nu\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \lambda f'(y) + \mu F'(y) + \nu\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \lambda f'(z) + \mu F'(z) + \nu\frac{dz}{ds}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \lambda f'(t) + \mu F'(t) + \nu\frac{dt}{ds}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzgl. mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dt}{ds}$ und addiert, so erhält man

$$\Sigma \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds} = \lambda \Sigma f'(x)\frac{dx}{ds} + \mu \Sigma F'(x)\frac{dx}{ds} + \nu.$$

Nun ist aber $\Sigma f'(x)dx = 0 = \Sigma F'(x)dx$, und weil $ddx = 0$, so folgt $\Sigma d^2x dx = 0$. Es ist demnach ν gleich Null, und man erhält zur Bestimmung der geodätischen Linie die Differentialgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \lambda f'(x) + \mu F'(x) \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \lambda f'(y) + \mu F'(y) \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \lambda f'(z) + \mu F'(z) \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= \lambda f'(t) + \mu F'(t) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Betrachtet man eine Fläche $[f(xyz),\ t = 0]$ im dreidimensionalen Raum, so erhält man aus (14) die Gleichungen der geodätischen Linie für diese Fläche. Das Gleichungssystem (14) ergibt auch die Variationsrechnung, wenn man bildet

$$\delta \int ds = 0.$$

Mit Hilfe des Systems (14) kann man eine Anschauung über die Lage der Schmiegungsebene in einem Punkt der geodätischen Linie bekommen. Man gehe von einem Punkt (x, y, z, t) der geodätischen Linie aus und lege in diesem durch das Linienelement der geodätischen Linie den Normalraum zur Fläche. Die Normalebene im Punkt (x, y, z, t) hat zu Gleichungen

$$\begin{aligned} X - x &= \varkappa f'(x) + \varkappa_1 F'(x) \\ Y - y &= \varkappa f'(y) + \varkappa_1 F'(y) \\ Z - z &= \varkappa f'(z) + \varkappa_1 F'(z) \\ T - t &= \varkappa f'(t) + \varkappa_1 F'(t), \end{aligned}$$

wo $\varkappa$, $\varkappa_1$ Parameter sind; denn multipliziert man diese Gleichungen bzgl. mit dx, dy, dz, dt und addiert, so erhält man

$$\Sigma(X - x)dx = 0.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, dass die Gerade, die den Flächenpunkt (x, y, z, t) mit dem Punkt (X, Y, Z, T) der Normalebene verbindet, senkrecht auf dem Linienelement der Fläche steht, dessen Richtungscosinusse gegen die Axen dx, dy, dz, dt proportional sind.

Jener Normalraum im Punkt (x, y, z, t) durch das Element der geodätischen Linie hat nun folgende Gleichung

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & T-t \\ dx & dy & dz & dt \\ f'(x) & f'(y) & f'(z) & f'(t) \\ F'(x) & F'(y) & F'(z) & F'(t) \end{vmatrix} = 0; \qquad (15)$$

denn die Coordinaten der Punkte der Normalebene sowie die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, etc. erfüllen diese Gleichung identisch. Die Gleichungen der Schmiegungsebene der geodätischen Linie im Punkt (x, y, z, t) lauten nach § 1

$$X - x = \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$Y - y = \alpha\frac{dy}{ds} + \beta\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$Z - z = \alpha\frac{dz}{ds} + \beta\frac{d^2z}{ds^2}$$

$$T - t = \alpha\frac{dt}{ds} + \beta\frac{d^2t}{ds^2}$$

Dabei sind α, β Parameter und die Differentialquotienten $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}$ genügen dem Gleichungssystem (14). Man sieht, dass die Coordinaten der Punkte der Schmiegungsebene die Gleichung (15) identisch befriedigen. Die Schmiegungsebene eines Punkts der geodätischen Linie liegt daher in dem Normalraum der Fläche, der durch jenen Punkt und den benachbarten der geodätischen Linie geht. Es folgt, dass zwei konsekutive Elemente der geodätischen Linie ebenso wie bei Flächen im R_3 einem Normalschnitt angehören. Man kann so wie bei gewöhnlichen Flächen die geodätische Linie, die in einer gewissen Richtung von einem Punkt A der Fläche ausgeht, infinitesimal konstruieren. Durch das Anfangselement AB lege man den Normalraum zur Fläche im Punkt A, dieser schneidet aus der Fläche eine Kurve aus; auf dieser gehe man von B bis zum benachbarten Punkt C. Nun lege man in B durch das Element BC den Normalraum zur Fläche und gehe auf der ausgeschnittenen Kurve vom Punkt C bis zum benachbarten Punkt D etc. Man kann daher auch kurz sagen: Der Normalraum in A, welcher das Element AB enthält, schneidet die geodätische Verlängerung BC von AB aus der Fläche. Die Schmiegungsebene in einem

Punkt der geodätischen Linie schneidet sowohl die Tangentialebene als auch die Normalebene der Fläche in jenem Punkt in je einer Geraden. Jene, da die Schmiegungsebene das Element der geodätischen Linie im Flächenpunkt mit ihr gemein hat, diese, weil die Schmiegungsebene mit ihr in jenem Normalraum liegt. Das Element der geodätischen Linie steht aber senkrecht zur Normalebene, demnach steht die Schmiegungsebene senkrecht zur Normalebene. Da weiter die Gerade, in der die Schmiegungsebene die Normalebene trifft, senkrecht auf der Tangentialebene steht, so enthält die Schmiegungsebene die Normale der Tangentialebene in dem dreidimensionalen Raum (Tangentialraum), in dem die Tangentialebene und die Schmiegungsebene liegen: Die Schmiegungsebene steht demnach senkrecht zur Tangentialebene, und es kann daher als gemeinsame Eigenschaft der geodätischen Linie für Flächen im R_3 und R_4 gelten, dass die Schmiegungsebene eines Punkts der geodätischen Linie senkrecht steht auf der Tangentialebene der Fläche in jenem Punkt.

Ueber die geodätische Krümmung einer Flächenkurve war in § 4 die Rede.

§ 11. Die Charakteristik.

Sind die Gleichungen der Fläche in der Form des § 3 (3) gegeben, so lauten die Gleichungen der Charakteristik des Nullpunkts nach § 6 (7)

$$\begin{aligned} X &= 0; \qquad Z = \frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)} \\ Y &= 0; \quad T = -\frac{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Der Uebersicht halber mögen auch die Sätze, die wir weiter oben schon kennen gelernt haben, hier noch einmal genannt werden.

Den Parameter-Wert λ für die Asymptotenrichtungen des Kegelschnitts erhält man durch Nullsetzen des Nenners in (1) d. h. der Funktionaldeterminante ϑ_{12} (s. § 7).

$$\vartheta_{12} \equiv \begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Gleichung werden auf der Fläche zwei Fortschreitungsrichtungen definiert, die nach § 6 (14) die Asymptotenrichtungen

sind. Es folgt daraus: Geht man in den Asymptotenrichtungen auf der Fläche vorwärts, so sind die Normalebenen der Fläche im Anfangs- und End-Punkt des Elements parallel. Die Richtung nach ihrem unendlich fernen Schnittpunkt ist eine Asymptotenrichtung der Charakteristik. Die Discriminante der Funktionaldeterminante ist aber die Resultante

$$R = D^2_{12} - 4D_{11}D_{22}$$

von f_1 und f_2 *) (wegen der Bezeichnung s. § 7). Diese entscheidet nach ihrem Vorzeichen (s. § 7) über den Charakter des Punkts als hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen. Es folgt also, dass die Charakteristik für den hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Punkt bzgl. eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Die Charakteristik zeigt hier den Charakter einer Indikatrix. Die Gleichung für die Asymptotenrichtungen der Charakteristik selbst erhält man, wie folgt:

Die Funktionaldeterminante quadriert und mit Null verglichen gibt *)

$$D_{22}(a+2b\lambda+c\lambda^2)^2 - D_{12}(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)+ \\ +D_{11}(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung und

$$\frac{Z}{T} = -\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b}$$

erhält man durch Elimination von λ die Asymptotenrichtungen der Charakteristik. Nach § 6 (13) kann man für die letzte Gleichung setzen

$$\frac{Z}{T} = -\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{a+2b\lambda+c\lambda^2}.$$

Man erhält somit

$$D_{11}Z^2+D_{12}ZT+D_{22}T^2 = 0,$$

$$\frac{Z}{T} = -\frac{D_{12}\pm\sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Nach § 9 (4) folgt daher: Schneidet man die Tangentialräume (Nullräume), auf welche die Fläche projiciert, Flächen mit dem Krümmungsmasse Null gibt mit der Normalebene, so ergibt der Schnitt

1) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 27 u. § 29.

zwei Gerade, welche die Asymptotenrichtungen der Charakteristik sind.

Die Axenrichtungen der Charakteristik sind durch die Gleichung

$$D_{12}Z^2 + 2(D_{22} - D_{11})ZT - D_{12}T^2 = 0$$

bestimmt; denn die beiden Wurzeln von Z/T dieser Gleichung bestimmen zwei Richtungen, die auf einander senkrecht stehen und die Asymptotenrichtungen der Charakteristik harmonisch trennen, da die Simultaninvariante der beiden Formen

$$D_{11}Z^2 + D_{12}ZT + D_{22}T^2$$
$$D_{12}Z^2 + 2(D_{22} - D_{11})ZT - D_{12}T^2$$

identisch verschwindet. Die Winkel der Asymptotenrichtungen werden demnach durch jene Richtungen halbiert, und diese sind daher die Axenrichtungen. Setzt man $Z/T = tg\varphi$, so ist

$$tg2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Nach § 9 folgt: Durch die Hauptkrümmungsräume werden aus der Normalebene die Axenrichtungen der Charakteristik ausgeschnitten.

Die Grösse Z/T ändert sich durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ nicht. Zieht man demnach durch den Flächenpunkt zwei auf einander senkrechte Linienelemente und schneidet die Normalebenen in den Endpunkten mit der im Anfangspunkt, so liegen die beiden resultierenden Schnittpunkte mit dem Flächenpunkt in gerader Linie. Auch die Umkehrung ist richtig. Der Flächenpunkt ist nun nicht etwa Mittelpunkt des Kegelschnitts, da die Grösse $Z^2 + T^2$ durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ ihren Wert ändert, sondern ein nicht näher charakterisierter Punkt, jedoch im Innern des Kegelschnitts; denn jede Gerade

$$Z + \sigma T = 0$$

schneidet den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten, da das Absolutglied der Gleichung dieser Geraden, in λ geschrieben, negativ ist.

Man schneide nunmehr die Normalebene mit dem Raum $Z = 0$. Dieser wird aus jener eine Gerade ausschneiden, auf der vom Kegelschnitt zwei Strecken T_1 und T_2 begrenzt werden, entsprechend den beiden Werten von λ_1 und λ_2, die der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0$$

genügen. Beachtet man die Gleichung (13) des § 6, so erhält man jene beiden Strecken durch folgende Gleichungen

$$\frac{1}{T} = \frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\,; \quad \beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta = 0.$$

Diese beiden Gleichungen gestatten nun eine bedeutsame Interpretation: Projiciert man die Fläche in den Raum $Z = 0$, so erhält man eine Projektionsfläche mit den Gleichungen

$$2t = \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2\,; \quad z = 0.$$

Die Normale dieser Fläche ist der Schnitt der Normalebene mit $Z = 0$, also obige Gerade in der Ebene des Kegelschnitts. Die Hauptkrümmungshalbmesser (R) der Projektionsfläche erhält man durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

wobei λ der Gleichung

$$\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta = 0$$

zu genügen hat. Es ist demnach

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{T}.$$

Schneidet man also den Kegelschnitt mit dem beliebigen Tangentialraum $Z = 0$, so erhält man zwei Abschnitte T_1 und T_2. Die Gerade, auf der T_1 und T_2 liegen, stellt die Normale, ihre Endpunkte stellen die Hauptkrümmungsmittelpunkte, die Abschnitte T_1 und T_2 die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Raum $Z = 0$ projicierten Fläche dar.

Der Kegelschnitt in der Normalebene wurde oben erzeugt, indem man um den Flächenpunkt eine kleine Kurve beschrieb und die Normalebenen in den Punkten dieser Kurve mit der Normalebene des Ausgangspunkts zum Schnitt brachte. Eine andere Erzeugungsweise ist folgende: Man projiciere die Fläche in die einfach-unendliche Schar von Tangentialräumen und man erhält so eine einfach-unendliche Schar gewöhnlicher Flächen. Ihre Normalen (im Nullpunkt) durchlaufen die Normalebene, die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte aber die Charakteristik. Das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ stellt also das Krümmungsmass der in den Raum $Z = 0$ projicierten Fläche dar. Ist $Z = 0$ ein Nullraum, so schneidet nach pag. 47

dieser aus der Normalebene eine Asymptotenrichtung aus. Ein Abschnitt T wird demnach unendlich gross und das Krümmungsmass der in einen Nullraum projicierten Fläche ist demnach gleich Null, wie dies schon pag. 75 festgestellt wurde. Ist $Z = 0$ ein Hauptkrümmungsraum, so wird durch diesen eine Axenrichtung aus der Ebene der Charakteristik geschnitten (pag. 76). Das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ ist also für einen Kegelschnitt ein Maximum bezw. Minimum, wenn die Gerade, auf der die Abschnitte liegen einer seiner Axen parallel ist. Zieht man ferner in der Ebene der Charakteristik durch den Flächenpunkt zwei zu einander senkrechte Gerade etwa $Z = 0$ und $T = 0$, so erhält man vier Abschnitte $Z_1 Z_2$, $T_1 T_2$, für die nach § 9 gilt

$$\frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} + \frac{1}{T_1^1} = \frac{1}{T_2^2} = a^2 + \alpha^2 + c^2 + \gamma^2 + 2b^2 + 2\beta^2,$$

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2} = ac - b^2 + \alpha\gamma - \beta^2.$$

Dies gilt für die Abschnitte auf zwei beliebigen zu einander senkrechten Geraden. Die Grösse $\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2}$, die gleich der Biegungsinvariante ist, zeigt einige Verwandtschaft mit der Potenz eines Punkts in Beziehung auf einen Kreis. Zwei Flächenelemente zweier Flächen im R_4 sind nur dann auf einander abwickelbar, wenn der Flächenpunkt in Beziehung auf die Charakteristik in beiden Fällen so liegt, dass die zwei einander entsprechenden Grössen $\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2}$ und $\frac{1}{Z_1' Z_2'} + \frac{1}{T_1' T_2'}$ gleich sind.

Alle Sätze über Sehnen eines Kegelschnitts durch einen innern Punkt finden eine Interpretation in den Krümmungsverhältnissen der Fläche. Ist z. B. der Kegelschnitt ein Kreis, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmass (Kreispunkt), die Hauptkrümmungshalbmesser zeigen in diesem Falle besondere Verhältnisse (s. unten). Ist der Flächenpunkt Mittelpunkt des Kegelschnitts, so haben im Nullpunkt alle Projektionsflächen (da $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = 0$) den Charakter von Minimalflächen. Wie unten gezeigt werden soll, sind die Hauptkrümmungshalbmesser in diesem Fall leicht anzugeben.

Es ist nun leicht, die Krümmungsmasse der verschiedenen Projektionsflächen in den drei verschiedenen Arten von Punkten anzugeben: Es zeigt sich, dass im elliptischen Punkt sämtliche Projektionsflächen negatives Krümmungsmass haben; die Biegungsinvariante ist daher auch negativ. Im hyperbolischen Punkt können Projektionsflächen mit positivem und negativem Krümmungsmass auftreten; die Biegungsinvariante in einem solchen ist positiv, negativ oder gleich Null, je nachdem die Hyperbel (Charakteristik) im stumpfen oder spitzen Winkel der Asymptoten verläuft oder gleichseitig ist. Im parabolischen Punkt haben sämtliche Projektionsflächen negatives Krümmungsmass. Den Beweis der obigen Behauptungen unterdrücken wir, da wir von diesen Sätzen weiter keinen Gebrauch machen werden. Im parabolischen Punkt fällt eine Asymptotenrichtung mit einer Axenrichtung zusammen, also auch ein Nullraum mit einem Hauptkrümmungsraum, wie dies in § 9 schon festgestellt wurde.

Wir wollen nunmehr den Satz beweisen, dass der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte die Fusspunktkurve der Charakteristik in Beziehung auf den Flächenpunkt ist.

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir zunächst für einen Punkt (Z_1, T_1) des Kegelschnitts, dem der Parameterwert λ entsprechen möge, die Gleichung der Tangente auf. Bedeutet (Z, T) einen Punkt dieser Tangente, so lautet ihre Gleichung

$$\frac{T-T_1}{Z-Z_1} = \frac{dT}{dZ}.$$

Nun ist

$$\frac{dT}{dZ} = \frac{\frac{dT}{d\lambda}}{\frac{dZ}{d\lambda}}.$$

Eine kleine Rechnung gibt

$$\vartheta^2{}_{12}\frac{dZ}{d\lambda} = (\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)(\alpha b-a\beta+\beta c-b\gamma)$$

$$\vartheta^2{}_{12}\frac{dT}{d\lambda} = -(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\alpha b-a\beta+\beta c-b\gamma).$$

Daraus folgt

$$\frac{dT}{dZ} = -\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}.$$

Die Normale vom Flächenpunkt auf die Tangente des Kegelschnitts im Punkt (Z_1, T_1), hat folgende Gleichung

$$-\frac{dZ}{dT} = \frac{T}{Z} = \frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{a+2b\lambda+c\lambda^2}.$$

Dem Werte λ entspricht eine bestimmte Fortschreitungsrichtung auf der Fläche. Legt man durch diese und die Normalebene im Flächenpunkt den Normalraum, so schneidet dieser aus der Fläche eine Kurve, deren Schmiegungsebene im Nullpunkt nach § 6 (8)

$$\frac{T}{Z} = \frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{a+2b\lambda+c\lambda^2}; \quad Y-\lambda X = 0$$

zu Gleichungen hat. Man sieht, dass die oben genannte Normale zur Tangente des Kegelschnitts die Schnittgerade der Normalebene mit der Schmiegungsebene jenes Normalschnitts ist. Der Krümmungsmittelpunkt dieses Normalschnitts muss in jener Schnittgeraden liegen, da derselbe sowohl in der Schmiegungsebene als auch in der Normalebene liegen muss. Wir werden sofort weiter beweisen, dass der betreffende Krümmungsmittelpunkt der Schnittpunkt jener Normalen mit der Tangente an den Kegelschnitt ist. Heisst nämlich der Abstand des Flächenpunkts von dieser Tangente ρ, so ist

$$\rho^2 = \frac{(Z_1\frac{dT}{dZ}-T_1)^2}{1+\left(\frac{dT}{dZ}\right)^2},$$

oder

$$\rho^2 = \frac{\left\{[\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta][a+2b\lambda+c\lambda^2]-[b\lambda^2+(a-c)\lambda-b][\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2]\right\}^2}{\mathfrak{H}^2_{12}\left\{[a+2b\lambda+c\lambda^2]^2+[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2]^2\right\}}.$$

Beachtet man die Gleichung (13) § 6, so erhält man

$$\rho^2 = \left(\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2.$$

Dies ist aber die Länge des Krümmungshalbmessers, der dem Wert λ entspricht [s. § 5 (1)]. Geht die Normale vom Flächenpunkt zur Tangente im Punkt (Z_1, T_1) des Kegelschnitts durch diesen Punkt selbst, steht sie also senkrecht auf diesem, so muss sein

$$-\frac{dZ}{dT} = \frac{T_1}{Z_1},$$

oder

$$[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]+[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta] = 0.$$

Dies ist die Gleichung (2) des § 5, welche die Werte von λ für die Hauptschnitte gibt. Es gilt daher folgender Satz: Legt man durch die Normalebene des Flächenpunkts O und ein Linien-Element λ der Fläche den Normalraum, so schneidet dieser aus der Fläche eine gewisse Kurve aus. Jeder Fortschreitungsrichtung λ entspricht ein bestimmter Punkt P der Charakteristik. Der Krümmungsmittelpunkt jener Kurve ist der Fusspunkt des Lotes g aus 0 auf die Tangente in P an die Charakteristik. Die Schmiegungsebene jener Kurve in O ist die Ebene durch das Element λ und das Lot g. Die Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Fusspunkte der Lote aus 0 auf die Charakteristik. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Normalschnitte ist die Fusspunktkurve der Charakteristik für den Flächenpunkt O; dieselbe berührt den Kegelschnitt in den Hauptkrümmungsmittelpunkten. Man sieht, dass die Hauptkrümmungshalbmesser Maxima oder Minima darstellen, weiter, dass mindestens zwei derselben reell sind, da sich von einem inneren Punkt eines Kegelschnitts mindestens zwei reelle Normalen auf denselben fällen lassen *). Ist der Kegelschnitt eine Parabel (parabolischer Punkt), so ist eine Normale, die Normale auf die unendlich ferne Gerade, unendlich gross. Das heisst im parabolischen Punkt ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross, wie wir dies schon oben gesehen haben. Man sieht, dass nie drei Hauptkrümmungshalbmesser einander gleich werden können, ausser wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist und der Flächenpunkt sein Zentrum. (Dieser Fall soll sofort weiter betrachtet werden.) Von einem innern Punkt eines Kegelschnitts lassen sich nämlich nie drei gleich lange Normalen zur Kurve ziehen, da sonst der betreffende Punkt Mittelpunkt eines Kreises wäre, der den Kegelschnitt in drei Punkten berühren oder in sechs Punkten schneiden würde. In dem oben erwähnten Falle, dass die Charakteristik ein Kreis und der Flächenpunkt dessen Zentrum ist, sind alle Krümmungshalbmesser einander gleich und alle Projektionsflächen haben gleiche aber entgegengesetzte Hauptkrümmungshalbmesser. Wir unterlassen es, die spezielle Flächen-

*) Salmon, analytische Geometrie der Kegelschnitte, Art. 192 und 221.

gleichung für diesen Fall aufzustellen. Werden in einem Punkt zwei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so lässt sich zeigen, dass der Flächenpunkt auf einer der Axen (im parabolischen auf der Axe) liegt, und dass die den beiden andern Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Hauptschnitte auf einander senkrecht stehen. Denn seien OI und OK die beiden gleichen vom Flächenpunkt O zum Kegelschnitt gezogenen Normalen, so beschreibe man um O mit Radius OI einen Kreis, der den Kegelschnitt in den Punkten I und K berührt. In I und K ziehe man die Tangenten, ihr Schnittpunkt sei L, dann ist offenbar $IL = KL$. Man verbinde L mit der Mitte M von IK, dann ist $\sphericalangle LMI = \pi/2$ und LM die Polare zu dem unendlich fernen Punkt von IK; denn LM enthält den Pol von IK und halbiert IK. LM ist daher konjugierter Durchmesser zu der Richtung von IK. Da aber $\sphericalangle LMI = \pi/2$, so ist LM eine Axe, auf der auch O liegt w. z. b. w. OL schneidet den Kegelschnitt in den Scheiteln S und S'. OS und OS' sind auch zwei Normalen zum Kegelschnitt, also die beiden andern Hauptkrümmungshalbmesser. Da aber SOS' eine Gerade ist, so stehen die den Hauptkrümmungsmittelpunkten S und S' entsprechenden Hauptschnittsrichtungen nach pag. 47 auf einander senkrecht. S und S' sind auch die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte einer Projektionsfläche in einen der Hauptkrümmungsräume. Ist der Kegelschnitt ein Kreis, der Flächenpunkt aber nicht sein Mittelpunkt, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmass. In diesem Falle gibt es nur zwei Lote auf den Kreis also nur zwei reelle Hauptkrümmungshalbmesser, die zugehörigen Hauptschnitte stehen auf einander senkrecht. Ist endlich der Flächenpunkt Mittelpunkt des Kegelschnitts (dies ist nur beim elliptischen Punkt möglich), so sind die Hauptkrümmungshalbmesser paarweise gleich, nämlich gleich den Längen der Halbaxen, und die Hauptschnittsrichtungen stehen paarweise auf einander senkrecht. Alle Projektionsflächen haben in einem solchen Punkt den Charakter von Minimalflächen.